

Теория игр во всех группах: занятие 2

Задача 13. Два человека встречаются и обмениваются закрытыми сумками. Каждый игрок может положить в сумку то, о чём договорились, либо обмануть партнёра, дав пустую сумку. Если игрок получает непустую сумку, то он получает полезность 10, если отдаёт непустую — полезность -5 . Пустая сумка приносит полезность 0. Найдите равновесие Нэша в этой игре.

Задача 14.¹ В племени Мумба-Юмба N человек ($N \geq 1$), каждый из которых ходит на охоту в лес. i -й соплеменник каждый день тратит на охоту долю c_i своего времени ($0 \leq c_i \leq 1$) и приносит y_i условных единиц добычи, при этом его производственная функция задается формулой $y_i = \sqrt{c_i}$. Каждый вечер, после возвращения охотников из леса, все соплеменники собираются вокруг костра и съедают всю принесенную за день добычу (каждый — свою), танцуя ритуальные танцы. Исследование, проведенное антропологами, показало, что i -й член племени оценивает свое удовольствие от прожитого дня в u_i единиц удовольствия, причем $u_i = x_i - c_i + R$, где x_i — количество съеденной добычи, а R — удовольствие от ритуальных танцев, которое всегда одинаковое и ни от чего не зависит. Каждый член племени стремится получить как можно больше удовольствия.

а) Сколько добычи каждый соплеменник будет приносить из леса в день, сколько времени будет тратить на охоту и какое удовольствие получать?

б) Выступая с новогодним обращением, вождь племени заявил, что отныне вся принесенная добыча будет складываться в одну кучу и затем делиться между всеми соплеменниками поровну. Изменится ли поведение членов племени в этих условиях? Ответьте на вопросы пункта а) и объясните получившиеся результаты.

Задача 15.² Петя и Вася прогуляли экзамен... Они знали, что профессор очень любит путешествия, и придумали для него историю про то, как они отправились в автомобильное путешествие по России и очень хотели вернуться в день экзамена, но по дороге обратно у них сломалось колесо... Профессор согласился дать им отдельный экзамен. Он посадил их по разным аудиториям и задал один и тот же вопрос: «Какое колесо сломалось?» Сколько равновесий по Нэшу существует в данной игре?

Задача 16. Найдите равновесие по Нэшу в игре «Финансирование общественного блага», в которую мы играли в первый день: каждый из N участников вкладывает сумму от 0 до 40, общая сумма вкладов делится поровну на всех, кто вложил больше 0. Чем эта игра отличается от описанной в задаче про Мумбу-Юмбу?

Задача 17.

а) Найдите SPNE³ в игре «Ультиматум», в которой сначала первый игрок выбирает, сколько из полученных от организатора 40 HS€ (целое число) отдать второму, и если второй не соглашается, то никто ничего не получает. Предположите, что игроки максимизируют свою сумму денег, а при равенстве сумм заботятся о справедливости.

б) Сформулируйте другие предпочтения игроков, более похожие на те, что чаще всего существуют в жизни. Решите задачу с этими предпочтениями.

Задача 18. Найдите равновесие по Нэшу в игре, где N участников независимо называют целые числа от 1 до 100, а затем те из них, чьи числа оказались ближе всего к $1/3$ от среднего всех названных чисел, получают приз.

¹Сибириада-2011. Автор — Данил Фёдоровых

²Источник — «Задачник для тигров» Бориса Демешева.

³(SP)NE — (Subgame Perfect) Nash Equilibrium — равновесие по Нэшу, совершенное в подыграх.

Задача 19. Найдите NE или SPNE в следующих аукционах, в которых можно делать только целые ставки:

а) Игроки по очереди называют суммы (каждый должен назвать больше, чем предыдущий), которые они готовы заплатить за лот 100 HS€. Свои ставки платят последние два участника, самый последний получает лот.

б) Ответьте на предыдущий пункт, если существует максимальный шаг повышения ставки в размере 5 HS€.

в) Закрытый all-ру аукцион: все участники одновременно делают ставки в конвертах и платят их. Все, кто сделал наибольшую ставку, получают лот.

г) Решите предыдущий пункт для случая, когда все победители делят лот поровну.

д) (**Glum Looser Auction**) Решите предыдущие два пункта для случая, когда победители получают лот, но не платят ставки.

Задача 20. В сложной задаче из одного из семинаров ЛЭШ два пункта. Вы решили один пункт, а Ваш товарищ решил другой, при этом решение другого пункта каждому из вас никак не дается. Чтобы получить плюрик за задачу, нужно знать решение обоих пунктов, поэтому вы с товарищем решили поделиться знаниями друг с другом. С другой стороны, вы с ним являетесь конкурентами в рейтинге плюриков. Поэтому есть опасность, что после того, как первый расскажет свое решение, второй «кинет» его и сдаст задачу один. Никто не хотел рассказывать решение первым, и для справедливости вы решили, что каждый напишет свое решение на листке бумаги, после чего вы поменяетесь листками.

При разных исходах этого обмена будут разные результаты:

А. Если вы оба напишете на листке решение, то оба подниметесь в рейтинге на 1 место.

В. Если никто не напишет решение на листке, то ваш рейтинг не изменится.

С. Если решение напишет только один из вас, то его место в рейтинге не изменится, а другой поднимется на 2 места.

Формализуйте ситуацию в виде платежной матрицы (таблицы выигрышей) и найдите NE. Каждый участник максимизирует свое изменение рейтинга, изменения рейтинга двух участников независимы, поскольку они находятся в общей таблице далеко друг от друга.

Задача 21. Вася и Петя должны загадать число в диапазоне от 20 до 50, включая концы. После этого выбирается X — минимум из двух загаданных чисел, и выдаются следующие платежи: загадавший большее число получит $X - 5$, загадавший меньшее получит $X + 5$. Если числа одинаковы, то каждый получит своё число. Найдите NE в такой игре.

Задача 22.⁴ «Рациональные пингвины» Пингвины живут стаями; основное место их обитания — суша, но питаются они рыбой, за которой им время от времени приходится нырять в море. К несчастью для них, в море есть не только рыба, которой они питаются, но и косатки⁵, которые питаются как рыбой, так и пингвинами. Косатки в поисках рыбы покрупнее далеко отплывают от берега, так что во многих случаях пингвинам удается поохотиться, не сталкиваясь с косатками; но так бывает не всегда.

Ученые, исследующие пингинов, не раз наблюдали такую картину: голодные пингвины сначала довольно долго толпятся на краю утеса, потом один из них наконец спрыгивает в воду, а когда он выныривает, то почти разом спрыгивают все остальные.

а) Объясните такое поведение пингинов, предполагая, что каждый пингвин ведет себя рационально (анализирует всю доступную ему информацию и принимает решения, которые позволяют ему добиться максимально благоприятного для себя исхода).

⁴Всероссийская олимпиада по экономике, 2011. Автор — Григорий Хацевич.

⁵Косатка — крупное хищное морское млекопитающее семейства дельфиновых, внешним видом напоминающее кита.

б) Покажите, что описанная ситуация не является эффективной, то есть физически возможны такие альтернативные действия пингвинов, при которых всем пингвинам было бы не хуже, чем при действиях, описанных в условии, и хотя бы одному пингвину было бы лучше.

в) Объясните, как данный сюжет иллюстрирует проблему предоставления общественных благ.

Задача 23.⁶ «Охота на слонов» Истребление живой природы является серьезной проблемой в Африке. Например, популяция слонов на этом континенте сократилась с более чем 1 млн особей в 1970-х гг. до 600 тыс. сейчас. Правительства разных стран пытаются бороться с браконьерством по-разному, и эта политика зачастую приводит к парадоксальным, на первый взгляд, результатам. Оказывается, что наименьшие проблемы с сокращением популяции слонов испытывают те страны, где... разрешена охота на них!

Например, власти Танзании запретили любую охоту на слонов в 1973 г., и за 5 лет после этого популяция этих животных сократилась более чем вдвое. После того, как в 1978 г. охота была вновь разрешена, количество особей стало расти и вернулось к своему прежнему уровню. Поселения, расположенные вблизи мест обитания слонов, активно пользуются своим правом продавать лицензии (в рамках установленной квоты) желающим поохотиться. Та же картина наблюдается в Зимбабве и других странах, где право на охоту можно законно купить.

а) Почему дикие животные, представляющие интерес для человека, часто подвергаются угрозе исчезновения, а домашние животные — нет?

б) Объясните, как легализация охоты на животных может приводить к росту популяции.

† **Задача 24.⁷ «Манипулятор»** Совет директоров ЗАО «Манипулятор» состоит из трех человек — Васи, Пети и Маши (Маша — председатель совета). Они должны принять решение о том, какие рекомендации по распределению полученной компанией прибыли дать общему собранию акционеров. Существует три альтернативы:

Альтернатива А: Выплатить всю прибыль в виде дивидендов акционерам.

Альтернатива В: Вложить всю прибыль в покупку новейшего оборудования.

Альтернатива С: Выплатить половину прибыли в виде дивидендов, а вторую половину вложить в усовершенствование имеющегося оборудования.

Предпочтения членов совета относительно альтернатив представлены в таблице:

	Вася	Петя	Маша
Самая лучшая	А	В	С
Средняя	В	С	А
Самая худшая	С	А	В

На голосование выставляются все три альтернативы, и каждый член совета должен проголосовать ровно за одну из них. Если есть альтернатива, которая набрала больше одного голоса, то она реализуется, в противном случае реализуется та альтернатива, за которую проголосовала председатель Маша. Голосование открытое и последовательное: сначала свой выбор объявляет вслух один член совета директоров, после него — второй и, наконец, третий.

Порядок голосования определяет председатель Маша. Какой порядок она выберет?

Задача 25. Формализуйте игру, в которой сначала школьник на зачете в ЛЭШ решает, списывать решение задачи из шпаргалки или нет, а потом преподаватель решает, выгнать его или нет.

⁶Всероссийская олимпиада по экономике, 2012. Автор — Данил Фёдоровых.

⁷Всероссийская олимпиада по экономике, 2013. Автор — Дмитрий Дагаев.

† **Задача 26.**⁸ Нигачрок и Контрабасман выкрали из секретной лаборатории волшебную свинью-копилку. Если положить в нее деньги и сказать «Ахалай Махалай», то сумма, лежащая в свинье, увеличивается в полтора раза. Один недостаток: работает только раз. Нигачрок и Контрабасман решили поступить так: каждый положит в копилку сколько хочет (не зная, сколько положил другой), потом они скажут «Ахалай Махалай», разобьют копилку и поделят ее содержимое поровну.

а) Найдите равновесные по Нэшу величины вкладов Нигачрока и Контрабасмана.

б) Является ли этот набор вкладов эффективным по Парето? Если нет, то приведите пример эффективного набора вкладов либо докажите, что в данных условиях его не существует.

† **Задача 27.**⁹ В муниципалитете на повестку дня был поставлен вопрос о том, какую часть средств местного бюджета следует направить на развитие спорта. От депутатов поступило три предложения: (1) сохранить прежний объем финансирования, (2) увеличить финансирование на 20 %, (3) увеличить финансирование на 50 %. В местной думе всего семь депутатов. В соответствии с существующей процедурой решения принимается так: каждый из депутатов ранжирует поступившие предложения в порядке убывания предпочтительности. Побеждает предложение, которое на первое место в рейтинге ставит большинство депутатов (или предложение с наименьшим номером, если таких предложений несколько). В данном случае оказалось, что победило второе предложение.

Однако после того, как все рейтинги были составлены, поступила информация о том, что доходы местного бюджета оказались ниже запланированных, а потому было решено снять с повестки голосования 3-е предложение о 50-процентном увеличении расходов. При этом решено заново предложения не ранжировать, а просто автоматически вычеркнуть в рейтинге каждого депутата третье предложение. Секретарь, производившая расчеты, обнаружила, что в новых условиях побеждает первая альтернатива. Будучи уверенной, что такого быть не может, и решила снова перепроверить результаты. Возможно ли, что расчеты секретаря верны? (Либо докажите, что подобное изменение выбора невозможно, либо приведите пример соответствующих рейтингов депутатов.)

Дополнительные задачи

Решение этих задач сдавать на «плюстик» не нужно, но можно обсудить с преподавателями. Похожие задачи могут встретиться на зачете.

† **Задача 28.**¹⁰ На маленькой фирме работают 10 человек. Каждый из них может работать либо старательно, либо «спустя рукава». Ни один работник не хотел бы быть уволенным. Работодатель видит качество работы каждого сотрудника и заинтересован в том, чтобы все работали старательно. Проблема заключается в том, что уволить можно не более чем одного сотрудника. Этот факт прекрасно известен работникам: они понимают, что если все будут плохо работать, то уволят только одного. Как построить систему угроз увольнений, чтобы каждый работал старательно?

† **Задача 29.** На судне N матросов и капитан. У каждого матроса есть шкатулка, в котором он хранит некоторый запас золотых монет, все шкатулки хранятся в одном сейфе. Во время бури все коробки попадали, золото рассыпалось, и невозможно определить, какие монеты выпали из каких шкатулок. Каждый матрос знает, сколько монет у него было, но не знает чужих количеств. Задача капитана — вернуть золото матросам так, чтобы каждый получил ровно столько, сколько было в его шкатулке. Конечно, если просто спросить матросов о количестве их монет, никто не скажет правду. Придумайте механизм, в котором сообщение правды каждым матросом составляло бы равновесие.

⁸Экономический бой ЛЭШ-2011, идея из «Задачника для тигров» Бориса Демешева.

⁹Муниципальный этап ВОШ в Москве, 2009—2010 учебный год.

¹⁰Источник — «Задачник для тигров» Бориса Демешева.