

Теория игр в группе X. Занятие 1.

Определение 1. *Стратегия* — описание действий игрока во всех возможных игровых ситуациях.

Определение 2. *Равновесием по Нэшу* называется такая комбинация стратегий участников, что никто из них не может улучшить свое положение, при условии, что остальные не меняют своих стратегий.

Определение 3. *Оптимум по Парето* — такой исход игры, при котором невозможно, оставаясь в рамках допустимых исходов, улучшить положение кого-то из игроков, не ухудшая положения остальных.

Задача 1. Страны А и В являются единственными продавцами нефти на мировом рынке. Взаимодействие между ними происходит один раз и следующим образом: страна А объявляет, сколько нефти она произведет, после этого объявление об объеме выпуска делает страна В. Каждая страна может выбрать один из трех объемов выпуска (L , M или H). После этого сам выпуск продукции происходит одновременно. Платежная матрица представлена под текстом задачи.

а) Предположим, страны четко следуют сделанным объявлениям. Найдите равновесие, совершенное в подыграх.

б) Какого исхода следует ожидать, если страны не обязаны следовать сделанным объявлениям и могут выбирать любой объем выпуска для производства?

		Страна В		
		L	M	H
Страна А	L	16 : 16	14 : 21	10 : 20
	M	21 : 14	15 : 15	9 : 12
	H	20 : 10	12 : 9	5 : 5

Задача 2¹ Иногда люди (фирмы, правительства) предпринимают затратные действия, не несущие им прямой выгоды. Так, испанский конкистадор Эрнан Кортес сжег свои корабли при высадке в Мексике; многие государства подписали Киотский протокол, взяв на себя обязательства ограничить уровень выбросов в атмосферу вредных побочных продуктов промышленного производства; люди покупают дорогие абонементы в фитнес-центры, зная, что заведомо не смогут часто туда ходить.

а) Постройте к любой из этих ситуаций дерево игры с разумными выигрышами, выбирая их так, чтобы поведение людей действительно было оптимальным.

б) Придумайте свой пример аналогичной ситуации и формально опишите его как игру.

Задача 3. (*Модель Штакельберга*) Спрос на рынке некоторого товара задан функцией $p = 120 - Q$. Две фирмы, производящие товар, имеют постоянные предельные издержки 40. Сначала первая фирма принимает решение об объеме выпуска, затем вторая фирма, услышав объявление первой, делает то же самое, а затем на рынке формируется цена. Найдите равновесие, совершенное в подыграх.

¹Заочный конкурс РЭШ, 2012

Задача 4.² По программе «Вкусное питание» Женя и Костя получают талоны, которые они могут обменять на жвачку и колу в школьной столовой. Женя получает два талона на одну жвачку каждый, Костя получает два талона на одну колу каждый, то есть Женя может сжевать две жвачки, а Костя выпить две колы в день. Однако оба мальчика любят разнообразие и предпочли бы потреблять по одной жвачке и коле в день. Кроме того, как для Жени, так и для Кости, жвачки и колы много не бывает, то есть чем больше жвачки и колы мальчики потребляют в день, тем им лучше.

а) Могут ли мальчики устроить взаимовыгодный обмен? Если да, то каково будет распределение жвачки и колы, достигнутое в результате этого обмена?

б) Допустим, они могут устроить только последовательный обмен: сначала Женя решает, отдавать ли один талон на жвачку Косте, а потом Костя решает, отдавать ли один талон на колу Жене. Если Костя учится в седьмом классе, а Женя — только во втором, и поэтому не может потребовать свой талон обратно в случае обмана, согласится ли Женя участвовать в таком обмене? А Костя?

в) Изменяются ли решения мальчиков, если они договариваются, что будут производить такой обмен каждый день в течение недели? А если в течение всего учебного года?

Задача 5. В городе М. два спортивных телевизионных канала, каждый из которых решает, что показывать вечером субботы: финальный матч Лиги Чемпионов или финальный матч Кубка Хайнекен по регби. 70 % телеаудитории в городе хотят смотреть футбол и только футбол, а 30 % — регби и только регби. Если каналы показывают одно и то же, то аудитория соответствующей игры делится между ними ровно пополам, а остальная аудитория выключает телевизоры. Что будут показывать каналы в равновесии по Нэшу (в одновременной игре), если они максимизируют количество зрителей? Является ли это равновесие эффективным?

Задача 6. Потенциальными арендаторами площадей в торговом центре являются 50 магазинов. Нахождение в большом торговом центре позволяют этим магазинам получить больше клиентов, при этом чем больше торговый центр, тем больше клиентов будет у каждого магазина. Торговый центр взимает с каждого арендатора плату в размере p , а каждая из фирм, решившая открыть магазин в торговом центре, получает выгоду $2n$, где n — количество *остальных* арендаторов (так, если арендаторов всего 19, то каждая получит выгоду 36).

а) Пусть сначала торговый центр выбирает p , а потом все магазины одновременно принимают решение, арендовать площадь или нет. Найдите равновесия по Нэшу.

б) Торговому центру удалось убедить 10 фирм бесплатно занять помещение на правах учредителей, после чего игра пункта а) происходит для оставшихся 40 фирм. Найдите равновесия.

в) Какую максимальную сумму торговый центр будет готов заплатить учредителям, чтобы гарантированно получить прибыль?

²Заочный конкурс РЭШ, 2012

Задача 7.³ На выборах президента страны X соревнуются два кандидата. Главный вопрос, который стоит на повестке дня предвыборной кампании — сколько воздушных шариков развесить на главной площади столицы ко Дню независимости страны X. Вечером накануне выборов кандидатам предстоит участвовать в теледебатах, на которых каждый из них должен будет окончательно объявить, сколько шариков он повесит на площади, если станет президентом.

У каждого гражданина страны есть свое любимое число, и если какой-то из кандидатов предложит именно это число шариков, то избиратель проголосует за него (если любимое число будет предложено обоими кандидатами, гражданин сделает выбор, подбрасывая монетку). Если же любимого избирателем числа не будет среди предложенных вариантов, то он проголосует за того кандидата, который предложит число ближе к его любимому (если разница предложений с любимым числом будет одинаковой, то он тоже подбросит монетку). Самое распространенное любимое число — 50 шариков, его любят 51 человек. 49 и 51 шарик любят по 50 человек, 48 и 52 шарика — по 49 человек, ..., 0 и 100 шариков — по 1 человеку. Это распределение любимых чисел известно кандидатам.

Чем закончатся дебаты, если оба кандидата стремятся выиграть выборы?

Задача 8. В некоторой стране есть два города и прямая дорога между ними. В каждом городе живет ровно треть населения, а оставшаяся треть равномерно распределена вдоль дороги. Джим Бим и Джек Дэниэлс — единственные во всей стране владельцы лицензий на продажу алкогольных напитков. Рынок этой продукции строго регулируется — государство установило фиксированную цену \bar{p} на бутылку любого алкоголя. Каждый производитель несет фиксированные предельные издержки c ($c < \bar{p}$).

Сначала Джим и Джек независимо решают (максимизируя каждый свою прибыль), где разместить магазины (в одном из городов или на дороге), а затем каждый житель страны принимает решение, в какой из двух магазинов идти (чем ближе идти, тем лучше). Если магазины расположены в одной точке, то потребители делятся поровну между ними.

- а) Найдите равновесное по Нэшу расположение магазинов.
- б) Является ли это расположение эффективным по Парето?

³Сибиряда, 2013

Задача 9.⁴ На олигополистическом рынке магния работают две фирмы — «Магнус» и «Магняк», функции издержек которых одинаковы и имеют вид $TC(q) = q^2$. Если фирмы выберут уровни выпуска q_1 и q_2 , то на рынке установится цена, равная $(9 - (q_1 + q_2))$. Об этой зависимости цены от выпусков знают обе фирмы. Кроме того, обе фирмы знают функции издержек друг друга.

а) Промышленные шпионы из «Магняка» вывели, что «Магнус» собирается произвести 5 тонн магния ($q_1 = 5$). *Сколько должен произвести «Магняк», если менеджеры фирмы верят этой информации и стремятся максимизировать прибыль?*

б) На самом деле, информация о выпуске «Магнуса» из пункта а) была искусно подброшенной дезинформацией. *Сколько единиц продукции в действительности выгодно произвести «Магнусу», если его менеджеры уверены, что дезинформация «сработала» и «Магняк» выберет уровень выпуска, найденный Вами в пункте а)?*

в) *Найдите выпуски фирм, если одновременно выполнены три условия:*

1. «Магняк», в отличие от пункта а), не поверил дезинформации «Магнуса».
2. «Магнус» уверен, что «Магняк» поверил дезинформации «Магнуса».
3. «Магняк» уверен, что «Магнус» уверен, что «Магняк» поверил дезинформации «Магнуса».

г) Поняв общий принцип, сформулируйте и решите следующий пункт данной задачи.

д) Решите пункт с номером ∞ .

† **Задача 10.** Решите задачу 3, если фирм три. Сначала фирма 1 выбирает q_1 в период 1, фирма 2 выбирает q_2 в период 2, а фирма 3 выбирает q_3 в период 3.

† **Задача 11.** *Модель Курно.*

а) Найдите равновесие по Нэшу в задаче 3, если фирмы принимают решение об объеме выпуска одновременно, не зная решения друг друга.

б) Повторите решение для случая трех фирм.

† **Задача 12.** Рассмотрите отрасль, в которой существует N фирм, конкурирующих по Бертрону (фирмы одновременно назначают цену, потребители распределяются поровну между всеми фирмами, где цена наименьшая) и имеющих постоянные предельные издержки $c_i < 10$ для i -й фирмы (постоянных издержек нет) и одновременно выбирающих цены товаров p_i . Спрос на рынке задан уравнением $P = 10 - Q$. Считайте, что деньги бесконечно делимы.

а) Пусть $N = 2$, $c_1 = c_2$. Найдите равновесный исход и покажите, что все остальные исходы таковыми не являются.

б) Пусть $N = 3$, $c_1 = c_2 = c_3$. Найдите все равновесия и обобщите этот результат для любого $N > 2$.

в) Ответьте на вопрос пункта а), если теперь $c_1 \leq c_2$.

г) Пусть $N = 2$, $c_1 = c_2 = 4$. Первая фирма говорит: я буду продавать товар по цене P_1 , а если вторая фирма будет продавать дешевле, то я компенсирую потребителям разницу в цене. Найдите равновесие, совершенное в подыграх, где сначала первая фирма делает такое объявление (выбирая P_1), потом вторая фирма выбирает P_2 , после чего покупатели решают, где и сколько товара купить.

⁴Пункты а)–в) из Межрегиональной олимпиады школьников НИУ ВШЭ и других вузов, 2012 г. (автор — Дмитрий Дагаев); автор пунктов г)–д) — Алексей Суздальцев.