

### III Международный школьный конкурс РЭШ

1 марта — 11 апреля 2012 года

*Решения конкурсных заданий*

#### **Задача 1.**

**(5 баллов)**

Предприниматель М. придумал, как сделать всех людей богаче. Он разослал письма 10 своим друзьям с предложением каждому из них заплатить М. по 100 рублей, а затем отправить такие же письма другим своим 10 друзьям с предложением каждому из них прислать отправителю письма 100 рублей и отправить такие же письма другим своим 10 друзьям и так далее. В итоге все участники получают выгоду: каждый (кроме самого М.) отдает 100 рублей и получает взамен 1000 рублей. Действительно ли эта схема позволит всем ее участникам заработать?

**Решение.** Если число участников схемы конечно, то система является замкнутой и сумма денег в ней фиксирована. Значит, если хотя бы у одного человека получится выиграть, то найдется хотя бы один человек, который проиграет. Поэтому всем заработать с помощью такой схемы не получится. Это, однако, не означает, что никому не удастся заработать. Возможность получения прибыли участниками схемы зависит от того, насколько рационально ведут себя люди.

Рассмотрим сначала ситуацию, в которой все люди ведут себя рационально. Допустим, что каждый человек может поучаствовать в схеме не более одного раза. Так как по нашему предположению число участников схемы конечно, то в некоторый момент обязательно останутся те, кто на последнем этапе получили письмо, но не могут переслать его другим людям, не являющимся участниками схемы. Такие люди откажутся участвовать в заведомо убыточной для них схеме, так как они должны заплатить отправителю письма, но не могут ничего получить взамен. Далее, участники схемы, которые посылают письма на предпоследнем этапе, также не получат никаких доходов, так как те, кому они послали письма, откажутся участвовать в этом. Но тогда уже участникам предпоследнего этапа не выгодно участвовать в схеме, и так далее. Следуя по данной цепочке рассуждений к самому началу схемы, мы убедимся, что те, кому М. отправил первые письма, откажутся принимать участие в этом начинании. Таким образом, идея предпринимателя М. работать не будет — ему никто не заплатит.

Подобные схемы называются пирамидами. На практике большое количество людей оказывается вовлеченными в такие схемы. Это происходит из-за того, что люди не всегда ведут себя рационально. Во-первых, люди, не понимая механизма пирамиды, могут принять ошибочное решение об участии в ней. Во-вторых, даже если люди понимают этот механизм, они надеются оказаться умнее других и заработать за счет других, менее рациональных с их точки зрения участников. Иными словами, они рассчитывают, что не окажутся в числе

последних желающих участвовать в пирамиде. А все, кроме самых последних участников пирамиды, действительно зарабатывают!

Отметим важную роль предположения о конечности участников схемы и аналогичного по смыслу предположения о том, что каждый участник может участвовать в схеме не более одного раза. Если «пирамида» растянута во времени, то число ее участников, вообще говоря, может быть неограниченным. Так работают многие государственные пенсионные системы, когда человек на протяжении своей трудовой деятельности отдает некоторую долю своего заработка в распоряжение пенсионного фонда и тем самым финансирует нынешних пенсионеров, а после выхода на пенсию получает пенсию за счет отчислений работающих людей.

### Задача 2.

(5 баллов)

Один экономист провел большое исследование, в котором оценил для каждого региона России численность населения, число занятых, среднюю заработную плату, уровень расходов населения и некоторые другие демографические и социально-экономические параметры. Когда у него спросили, какова средняя зарплата в России, он сказал, что это легко подсчитать, сложив средние зарплаты по регионам и разделив затем эту сумму на число регионов. Через несколько секунд экономист заметил, что такой способ даст не совсем корректную оценку средней заработной платы в России и что нужно использовать другой метод расчета. Как Вы думаете, почему предложенный способ расчета даст неправильную величину среднероссийской заработной платы? Какой способ расчета Вы бы предложили, имея результаты данного исследования?

**Решение.** Предложенный изначально способ дает ошибку, поскольку он не учитывает долю занятых лиц в регионе относительно общего количества занятых в стране. В качестве простого примера рассмотрим страну, в которой есть всего два региона. В одном из них число занятых равно 100 человек, а во втором — 20. Если в первом регионе средняя зарплата равна 10, а во втором — 20, то первый предложенный метод оценит среднюю зарплату по всей стране так:

$$\frac{10 + 20}{2} = 15.$$

Однако это не соответствует действительности. По определению, средняя зарплата по всей стране — это суммарная оплата труда, деленная на общее число занятых. Поэтому в данном примере средняя зарплата равна

$$\frac{100 \times 10 + 20 \times 20}{100 + 20} = \frac{1400}{120} = \frac{35}{3}.$$

Рассмотрим общий случай. Обозначим за  $k$  число регионов в России. У исследователя имеются данные о численности занятого населения в каждом регионе  $N_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , а также данные по средним зарплатам в каждом регионе  $W_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Тогда суммарная зарплата в  $i$ -м регионе равна  $W_i \times N_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , а суммарная зарплата по всей России равна  $W_1 \times N_1 + W_2 \times N_2 + \dots + W_k \times N_k$ . Общее число занятых лиц в России равно  $N_1 + N_2 + \dots + N_k$ . Следовательно, средняя зарплата в России может быть вычислена как

$$\frac{W_1 \times N_1 + W_2 \times N_2 + \dots + W_k \times N_k}{N_1 + N_2 + \dots + N_k}.$$

**Задача 3.**

**(5 баллов)**

Иногда люди (фирмы, правительства) предпринимают затратные действия, не несущие им прямой выгоды. Так, испанский конкистадор Эрнан Кортес сжег свои корабли при высадке в Мексике; многие государства подписали Киотский протокол, взяв на себя обязательства ограничить уровень выбросов в атмосферу вредных побочных продуктов промышленного производства; люди покупают дорогие абонементы в фитнес-центры, зная, что заведомо не смогут часто туда ходить. Что объединяет все эти действия? Зачем люди могут так поступать?

**Решение.** Во всех описанных случаях люди (правительства) предпринимают затратные действия, чтобы ограничить множество своих возможных действий в будущем. При некоторых вариантах развития событий у них может возникнуть соблазн отклониться от своих долгосрочных планов. Они могут решить ретироваться на кораблях, перестать ходить в фитнес-клуб или резко увеличить вредное для окружающей среды производство. Если же заранее лишить себя возможности так поступить, можно достичь более выгодного результата. Солдаты, зная, что отступать некуда, будут лучше драться; человек, купивший абонемент, скорее пойдет в фитнес-центр, так как деньги он уже потратил, и так далее.

**Задача 4.**

**(7 баллов)**

Когда правительство некоторой страны обсуждает возможность повышения возраста выхода на пенсию, наибольший протест это вызывает у тех жителей, которые должны были бы совсем скоро стать пенсионерами. Люди среднего возраста, а также молодежь относятся к повышению пенсионного возраста более терпимо.

**а)** Не странно ли это? Казалось бы, повышение возраста коснется каждого гражданина, а не только того, кто собирается уйти на пенсию в ближайшее время. Чем Вы можете объяснить этот факт?

**б)** Эксперты предложили правительству следующую схему повышения на 5 лет возраста выхода на пенсию: правительство сегодня объявляет, что с этого года в течение 10 лет пенсионный возраст будет повышаться на полгода каждый год. Каковы преимущества и недостатки этого способа?

**Решение.**

**а)** Объяснение этого эффекта кроется в том, что люди *дисконтируют* свое будущее благосостояние: с точки зрения сегодняшнего дня получение зарплаты сейчас принесет большую полезность, чем получение такой же зарплаты через неделю; съесть шоколадку сегодня приятнее, чем съесть такую же шоколадку завтра; уплатить штраф за нарушение правил дорожного движения сегодня неприятнее, чем завтра. Это происходит из-за фактора неопределенности (до следующего периода может что-нибудь случиться), из-за упущенной выгоды (деньги, полученные сегодня, можно положить на депозит и получить в следующем периоде проценты) и просто из-за того, что люди нетерпеливы. Для людей предпенсионного возраста повышение возраста выхода на пенсию затрагивает их самое ближайшее будущее, в то время как на молодежи это изменение может отразиться лишь в долгосрочной перспективе (оно сократит количество шоколадок, которые они смогут съесть через 30 лет, но из-за дисконтирования они сейчас придают маленькое значение удовольствию от этих шоколадок). Поэтому при одинаковых взглядах на проблему повышения пенсионного возраста пожилые люди будут проявлять гораздо большее недовольство, чем молодежь.

**б)** Преимущество данной схемы заключается в том, что для людей, которым предстоит выход на пенсию в ближайшем будущем, этот переход будет меньшим шоком, чем одномоментное резкое повышение пенсионного возраста. У людей появится возможность лучше подготовиться к нескольким лишним годам работы и пересмотреть свои финансовые стратегии. Для правительства это означает меньшие политические риски. Недостаток заключается в том, что если существует текущий дефицит бюджета пенсионного фонда, то предложенный метод не позволит решить проблему быстро или даже в течение нескольких лет. В долгосрочном периоде, когда реформа завершится через 10 лет, система будет более сбалансированной. Однако до этого, на протяжении этих лет, необходимо будет изыскать источник покрытия сложившегося дефицита.

**Задача 5.**

**(7 баллов)**

В Министерстве транспорта заметили, что вскоре после повышения тарифов на электроэнергию растут цены на железнодорожные услуги, причем как на перевозки тепловозами, так и электровозами. С целью удержания роста цен на перевозки они предложили ограничивать отпускные тарифы на электроэнергию для железнодорожников. Как Вы думаете, позволит ли регулирование тарифов на электроэнергию избежать роста цен на железнодорожные перевозки?

**Решение.** С одной стороны, рост цен на перевозку грузов железнодорожным транспортом может быть вызван ростом цен на электроэнергию. Из-за более дорогого электричества увеличиваются издержки на транспортировку грузов с помощью электровозов, а рост цен на перевозку с помощью тепловозов может быть следствием роста цен на взаимозаменяемый товар. С другой стороны, необходимо помнить, что *после этого* не значит *из-за этого*. Очевидно, что электроэнергия — не единственный источник расходов железнодорожных компаний. Так, рост цен на электроэнергию может быть вызван ростом цен на уголь — основное топливо ТЭЦ и ГРЭС. Таким образом, рост цен на уголь мог спровоцировать и рост цен на перевозки грузов тепловозами, и рост цен на электроэнергию, что, в свою очередь, повлекло рост цен на перевозки грузов электровозами. Успех политики сдерживания роста цен на перевозки с помощью ограничения цен на электроэнергию зависит от настоящей причины роста цен на перевозку товаров. Если имел место рост цен на уголь, то ограничение цен на электроэнергию не отразится на ценах на железнодорожные перевозки с помощью тепловозов, и, соответственно, эффект роста цены взаимозаменяемого товара будет толкать цены на перевозки с помощью электровозов вверх. В такой ситуации влияние этой меры на конечные тарифы перевозок будет незначительным. Однако если рост цен на перевозки действительно был вызван ростом цен на электроэнергию, то предложенная политика будет эффективной.

**Задача 6.**

**(7 баллов)**

**а)** Известны примеры, когда производители офисных программных пакетов (состоящих из текстового редактора, электронной таблицы, редактора презентаций и т. п.) продают разные варианты этих пакетов по разным ценам. Например, пакет «Office для дома и учебы» компании *Microsoft*, состоящий из четырех основных программ, стоит в 7,5 раз дешевле, чем пакет «Office профессиональный», состоящий из семи программ (тех же четырех, что в первом пакете, и трех дополнительных). По отдельности покупать приложения нельзя. Объясните, как объединение программ в такие наборы позволяет компании увеличить прибыль по сравнению с продажей программ по отдельности.

**б)** Кроме объединения программ в комплекты, у политики ценообразования компании *Microsoft* есть также следующая особенность. Если Вы хотите установить пакет «Office для дома и учебы» на три компьютера, то покупка обойдется Вам не в три раза дороже, чем если бы Вы покупали программу для одного компьютера, а только в 1,35 раза. Объясните, как такая скидка покупателям, желающим приобрести несколько единиц продукта, позволяет компании *Microsoft* увеличить свою прибыль по сравнению с назначением единой цены за единицу продукции, не зависящей от объема покупки?

**Решение.**

**а)** Разные потребители по-разному оценивают офисные программы: кому-то больше нужен текстовый процессор, кто-то чаще пользуется редактором электронных таблиц, а для кого-то главная функция — создание презентаций. Соответственно отличаются и денежные суммы, которые они готовы платить за каждый продукт. Если продавать программы по отдельности, то на каждую из них придется назначать единую цену, и если эта она будет высокой, то те потребители, которые ценят данную программу меньше, не купят ее. Если же эта цена будет низкой, то программу купят больше потребителей, но самые платежеспособные из них заплатят существенно меньше, чем могли бы.

Однако общая сумма, которую готовы заплатить за комплект программ потребители из той или иной группы, вполне может быть примерно одинаковой, и тогда назначение цены пакета в виде этой общей суммы позволит продать товар всем и в то же время заставит всех платить примерно столько, сколько они готовы. Чтобы лучше понять эту логику, рассмотрим следующий пример. Пусть есть два потребителя, каждый из которых предъявляет спрос на две программы: текстовый процессор и редактор презентаций. Суммы, которые каждый из них готов заплатить за программы и за их набор, представлены в таблице:

	Потребитель А	Потребитель Б
Текстовый процессор	100	70
Редактор презентаций	70	100
Набор	170	170

Если бы производитель назначал цену на каждый продукт в отдельности и максимизировал выручку<sup>1</sup>, то он бы назначил цену 70 на обе программы, оба потребителя бы купили и текстовый процессор, и редактор презентаций, выручка при этом равнялась бы 280 д. е. Если же продавать программы в наборах по цене 170 д. е. за набор, то оба потребителя купят набор и выручка составит 340 д. е.

Кроме того, производитель понимает, что существует несколько групп потребителей, представители которых существенно отличаются платежеспособностью (например, крупные компании готовы заплатить существенно больше, чем студенты, использующие компьютер дома). Чтобы максимизировать доход, производителю было бы выгодно продавать набор программ представителям каждой группы именно за такую сумму, которую каждый из них готов заплатить, но добиться этого непросто: крупные компании стали бы отправлять за покупками студентов, если бы для тех была существенная скидка. Решение заключается в осознании того, что представителям разных групп нужны разные наборы программ: например, если кто-то предъявляет спрос на средство управления базами данных или менеджер проектов, то он, скорее всего, делает покупку для компании. Поэтому можно продавать несколько

<sup>1</sup>Максимизация выручки — резонная предпосылка, так как издержки производителей программного обеспечения практически не зависят от количества проданных копий.

видов наборов, каждый — для своей группы потребителей. Например, набор для домашнего использования может включать только основные программы и стоить дешевле, тогда как пакет, состоящий в том числе из профессиональных программ — существенно дороже. Домашние пользователи не будут покупать профессиональный пакет, так как он для них очень дорог и включает не очень нужные программы, а крупные компании не будут покупать домашний пакет, так как в нем нет необходимых для них программ. Таким образом, потребители из более платежеспособной группы будут платить больше, чем потребители из менее платежеспособной группы.

Заметим также, что продажа офисных программ в наборах может быть дешевле отдельной продажи: не нужно записывать несколько дисков (если программы продаются на дисках), упаковывать их в несколько коробок и т. п. К тому же, покупатели и без объединения в наборы покупали бы несколько программ одного производителя: они лучше совместимы между собой.

**б)** Обычно люди ценят последующие единицы продукта меньше, чем первую. В частности, потребители готовы заплатить бóльшую сумму за то, чтобы офисные приложения были установлены *хотя бы на одном* из их домашних компьютеров (на том, где они необходимы больше всего), чем за то, чтобы они появились еще и на ноутбуке восьмилетней дочки. Продажа товаров наборами позволяет делать так, чтобы за покупку следующих единиц потребители платили меньше, чем за первую: в описанном в задаче примере вторая и третья копия программного пакета стоят (вместе!) всего лишь 35 % стоимости первой. Таким образом достигается та же цель, что и в пункте а): те единицы товара, которые ценятся потребителями меньше, продаются дешевле.

### **Задача 7.**

**(7 баллов)**

Для борьбы с курением в США используют самые разные меры. Одной из популярных мер последних лет стал запрет на курение в ресторанах и барах. В основном такие запреты принимаются на уровне городов, поселков и округов. Исследования показали, что запрет на курение в барах и ресторанах приводит к снижению как процента курящих, так и интенсивности курения среди тех, кто продолжает курить. Впрочем, эта мера имела и побочные эффекты: оказалось, что она привела к уменьшению потребления пива и крепких спиртных напитков. Но количество дорожно-транспортных происшествий с участием пьяных водителей в местностях, где введен запрет на курение в барах и ресторанах, выросло. Как можно объяснить рост количества дорожно-транспортных происшествий с участием пьяных водителей?

**Решение.** Многие американцы любят после окончания рабочего дня или окончания рабочей недели провести время в баре или ресторане с друзьями. Нередко такой досуг сопровождается потреблением алкоголя и курением. Введение запрета на курение в барах и ресторанах создает неудобство тем, кто любит сопровождать распитие спиртных напитков курением. С введением запрета такие люди вынуждены идти на ухищрения. Они должны или найти бары и рестораны, которые не соблюдают новый закон, или выехать за пределы административного образования, которое запрещает курение в барах и ресторанах. В обоих случаях это приводит к тому, что те, кто хочет выпить и покурить одновременно, вынуждены вести машину на более длинную дистанцию после запрета, чем до запрета. При возвращении домой пьяные посетители ресторанов и баров управляют машиной дольше, чем до запрета. Следовательно, повышается вероятность ДТП.

**Задача 8.**

**(7 баллов)**

По программе «Вкусное питание» Женя и Костя получают талоны, которые они могут обменять на жвачку и колу в школьной столовой. Женя получает два талона на одну жвачку каждый, Костя получает два талона на одну колу каждый, то есть Женя может сжевать две жвачки, а Костя выпить две колы в день. Однако оба мальчика любят разнообразие и предпочли бы потреблять по одной жвачке и коле в день. Кроме того, как для Жени, так и для Кости, жвачки и колы много не бывает, то есть чем больше жвачки и колы мальчики потребляют в день, тем им лучше.

**а)** Могут ли мальчики устроить взаимовыгодный обмен? Если да, то каково будет распределение жвачки и колы, достигнутое в результате этого обмена?

**б)** Допустим, они могут устроить только последовательный обмен: сначала Женя решает, отдавать ли один талон на жвачку Косте, а потом Костя решает, отдавать ли один талон на колу Жене. Если Костя учится в седьмом классе, а Женя — только во втором, и поэтому не может потребовать свой талон обратно в случае обмана, согласится ли Женя участвовать в таком обмене? А Костя?

**в)** Изменятся ли решения мальчиков, если они договариваются, что будут производить такой обмен каждый день в течение недели? А если в течение всего учебного года?

**Решение.**

**а)** Если Костя отдаст Жене один талон на колу, а взамен получит один талон на жвачку, то они оба выиграют от такого обмена, так как по условию оба мальчика ценят разнообразие. Они по-прежнему будут потреблять две единицы продукта в день, но это будут разные продукты (кола и жвачка, а не только что-то одно). Очевидно, что это взаимовыгодный обмен.

Отметим, что обмен двух талонов на колу на два талона на жвачку также может быть взаимовыгодным при некоторых предпочтениях ребят. Действительно, если предпочтения ребят устроены так, что для Кости две жвачки лучше, чем две колы, а для Жени — наоборот, то оба мальчика выиграют, если поменяются всеми талонами.

**б)** Допустим, мальчики решили организовать взаимовыгодный обмен. Пусть сначала Женя отдает свой талон на жвачку Косте, а потом Костя решает, отдавать ли свой талон на колу Жене. В этом случае Косте не выгодно отдавать Жене свой талон на колу, так как для Кости одна жвачка и две колы что лучше, чем одна жвачка и одна кола. Женя не может потребовать свой талон обратно, поэтому он изначально не согласится на такую процедуру обмена. А Костя изначально согласен на последовательный обмен, но после того, как он получит талон на жвачку от Жени, он нарушит свое обещание и не отдаст Жене свой талон на колу. Обмен не состоится.

**в)** Отличие этой ситуации от предыдущего пункта в том, что возможность повторного взаимовыгодного обмена ограничивает стимулы Кости сжульничать. Если Костя обманет Женю уже в первый день, то Женя может не согласиться совершать взаимовыгодные обмены в будущем, что невыгодно для Кости. В первый день Костя готов отдать свой талон на колу, чтобы взаимовыгодный обмен состоялся и чтобы Женя был готов совершить обмен на следующий день. Иными словами, Костя готов создать репутацию ради дальнейшей пользы. Однако в самый последний день недели (года), Косте не нужно будет поддерживать свою репутацию и, если Женя согласится на обмен, то Костя не отдаст ему свой талон на колу. Зная это, Женя не согласится на обмен в последний день недели (года), то есть обмен в последний день не состоится. Теперь предпоследний день недели (года), в течение которой (которого) мальчики договорились меняться, станет последним. Однако, следуя той же логике, Костя

не отдаст Жене свой талон, если Женя согласится на обмен. Предвидя это, Женя на обмен не согласится, и в предпоследний день недели (года) обмен также не состоится, и так далее. Таким образом, обмен не состоится и в самый первый день, Женя на такую процедуру не согласен.

Последовательные стратегические взаимодействия нескольких лиц удобно анализировать «с конца», как это было сделано в этой задаче, а также в задаче 1. Это называется методом обратной индукции.

### Задача 9.

(14 баллов)

На некоторой плоскости есть четыре города, расположенные в вершинах выпуклого четырехугольника  $ABCD$ . Города впервые в истории решают провести между собой спортивное соревнование — Весеннюю Олимпиаду. Поскольку ни один из городов изначально не обладает необходимой для Олимпиады инфраструктурой, на то, чтобы быть местом ее проведения, претендует любая точка плоскости (в том числе, и сами города). Каждый город хотел бы, чтобы Олимпиада прошла как можно ближе к нему.

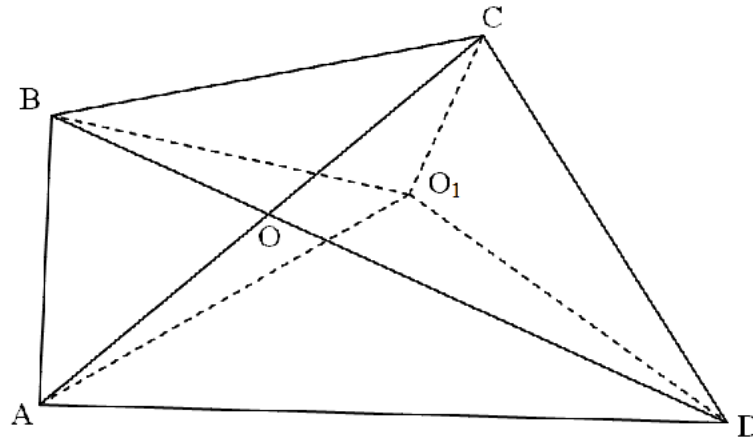
а) Будем называть точку проведения Олимпиады *общественно оптимальной* в случае, если сумма расстояний от нее до городов минимальна. Найдите эту общественно оптимальную точку и обоснуйте свой выбор.

б) Представим себе ситуацию, при которой на голосование городов были бы вынесены две альтернативы: провести Олимпиаду в точке  $X$  или провести ее в точке  $Y$  (точки  $X$  и  $Y$  не совпадают). Будем говорить, что *точка  $X$  побеждает точку  $Y$* , если при таком голосовании как минимум три города из четырех голосовали бы за  $X$ . Найдите множество точек  $P$  на данной плоскости, таких, что точку  $P$  не побеждает ни одна другая точка, отличная от  $P$ . Являются ли эти точки общественно оптимальными?

### Решение.

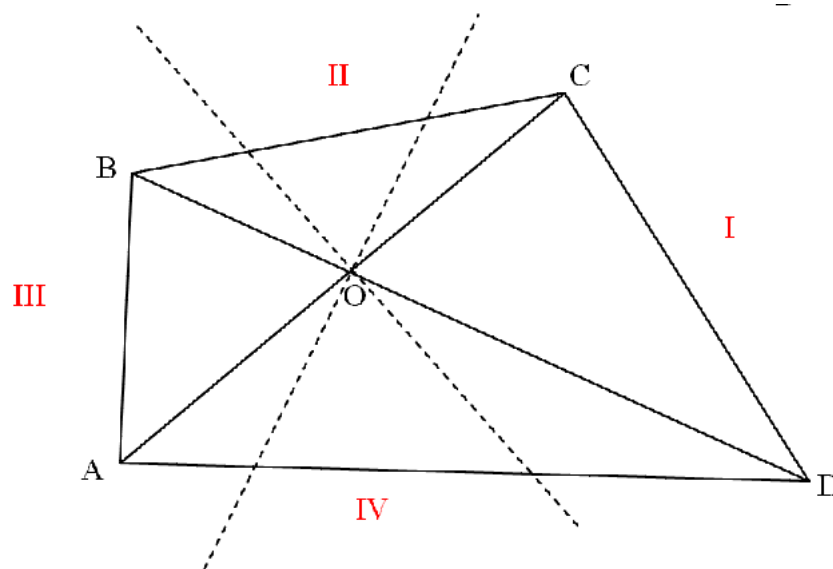
а) Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей четырехугольника  $ABCD$ , а  $O_1$  — произвольная точка плоскости, отличная от точки  $O$ . Докажем, что  $O_1A + O_1B + O_1C + O_1D > OA + OB + OC + OD$ . Если  $O_1$  не лежит на прямых  $AC$  или  $BD$ , то, по неравенству треугольника,  $O_1A + O_1C > AC = OA + OC$ ,  $O_1B + O_1D > BD = OB + OD$ . Сложив почленно эти два неравенства, получим, что  $O_1A + O_1B + O_1C + O_1D > OA + OB + OC + OD$ . Остается рассмотреть случай, когда  $O_1$  лежит на одной из прямых  $AC$  или  $BD$ . Пусть  $O_1$  лежит на прямой  $AC$ . Тогда снова, в силу неравенства треугольника,  $O_1B + O_1D > BD = OB + OD$ . Так как точки  $A, O_1, C$  лежат на одной прямой, то к ним применить неравенство треугольника нельзя. Тем не менее, очевидно, что в этом случае справедливо более слабое неравенство  $O_1A + O_1C \geq AC = OA + OC$ . Сложив почленно два неравенства, снова получим, что  $O_1A + O_1B + O_1C + O_1D > OA + OB + OC + OD$ . Случай, когда точка  $O_1$  лежит на прямой  $BD$ , рассматривается аналогично. Таким образом, сумма расстояний до всех четырех городов от точки  $O$  меньше, чем от точки  $O_1$ . Значит,  $O$  — общественно оптимальная точка и других общественно оптимальных точек нет.





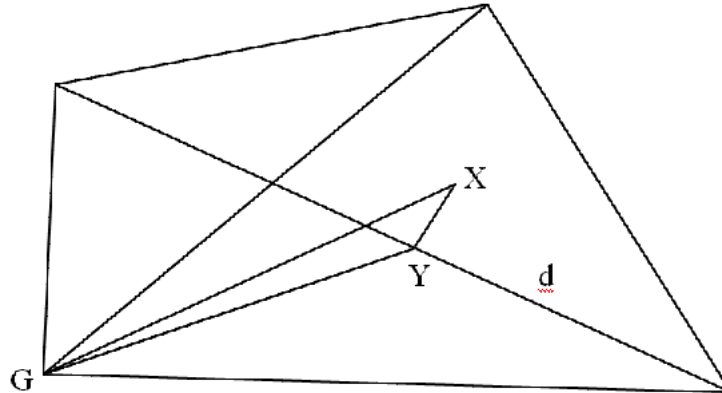
б) Назовем точку, которую не побеждает никакая другая точка, *непобедимой*. Докажем, что (i) точка пересечения диагоналей является непобедимой; (ii) никакая другая точка непобедимой не является.

(i) Проведем через точку пересечения диагоналей прямые, перпендикулярные им. Эти прямые разобьют плоскость на 4 области, обозначенные за I, II, III, IV. Допустим, на голосование против точки  $O$  выносятся точка  $X$ . Окружность с центром в вершине четырехугольника, проходящая через точку  $O$ , будет касаться одного из перпендикуляров. Поэтому если точка  $X$  принадлежит области I, то за  $O$  (и против  $X$ ) будут голосовать как минимум города  $A$  и  $B$ ; если точка  $X$  принадлежит области II, то за  $O$  будут голосовать как минимум города  $A$  и  $D$ ; если  $X$  принадлежит области III, то за  $O$  будут голосовать как минимум города  $D$  и  $C$ , а если  $X$  принадлежит области IV, то за  $O$  будут голосовать как минимум города  $B$  и  $C$ . Наконец, если точка  $X$  лежит на одном из перпендикуляров, то как минимум три города будут голосовать за  $O$ . Таким образом, точка  $O$  — действительно непобедимая.



(ii) Теперь докажем, что любую другую точку можно победить. Возьмем произвольную точку  $X$ , не совпадающую с  $O$ . Опустим из нее перпендикуляр на какую-нибудь диагональ (это всегда можно сделать, ведь  $X$  не лежит хотя бы на одной из диагоналей). Обозначим эту диагональ за  $d$ , а полученную точку — за  $Y$ . Докажем, что точка  $Y$  побеждает точку  $X$ . Заметим, что если на голосование будут вынесены  $Y$  и  $X$ , то города, расположенные в концах

диагонали  $d$ , будут голосовать за  $Y$  (перпендикуляр является кратчайшим расстоянием от точки до прямой). Кроме того, за  $Y$  обязательно будет голосовать город, расположенный относительно точки  $X$  по другую сторону от диагонали  $d$ . Почему это так? Обозначим этот город за  $G$ . Заметим, что  $\triangle GYX$  — тупоугольный, в нем  $\angle GYX > 90^\circ$  по построению. Отсюда следует, что сторона  $GX$  в нем самая большая. Следовательно,  $GX > GY$ , и город  $G$  будет голосовать за  $Y$ . Итак, мы нашли три города, которые будут голосовать за  $Y$ . Значит, точка  $X$  не является непобедимой.



Вывод: множество непобедимых точек состоит из одной точки — точки пересечения диагоналей. Она, как было показано ранее, является и общественно оптимальной.

#### Дополнительные задания:

- Придумайте свою «негеографическую» интерпретацию задачи (подсказка: представьте, что есть компания из четырех экономических агентов, которая решает, на каком уровне установить значения неких двух переменных, влияющих на благосостояние каждого из них четырех).
- Обобщите результаты для выпуклого  $n$ -угольника,  $n \geq 3$ . При каких  $n$  множество непобедимых точек в общем случае непусто (включает хотя бы одну точку)? При каких  $n$  какая-нибудь из непобедимых точек будет еще и общественно оптимальной?

**Задача 10.****(14 баллов)**

В стране Фантия очень строгое валютное и банковское регулирование. В обращении есть всего три валюты: фантики (ф), евро (€) и доллары (\$), все банки обменивают любую валюту на любую другую по единому (но разному для разных пар валют) курсу, устанавливаемому Центральным банком. В Фантии доступны следующие банковские операции:

1) **Обмен валюты.** Каждый житель за одну операцию может обменять любое количество любой валюты, имеющейся у него на руках, по установленному Центральным банком курсу. Допускается обмен нескольких разных валют (но только имеющихся сейчас на руках!) или обмен на несколько разных валют в рамках одной операции. За один день жителям запрещено совершать более трех операций с обменом валюты.

2) **Взятие кредита.** Каждый день утром, еще до начала работы касс обмена валюты, гражданин Фантии может взять в банке кредит в любой(-ых) валюте(-ах), который он обязан погасить вечером того же дня (уже после закрытия касс обмена валюты). По законам Фантии, кредит в каждой валюте можно взять только в размере, не превышающем количества этой валюты, уже имеющегося на руках. Например, если на руках есть 30 евро и 70 фантиков, то в кредит можно взять не более 30 евро и не более 70 фантиков.

3) **Создание вклада.** Каждый день утром, еще до начала работы касс обмена валюты, гражданин Фантии может открыть вклад на один день в любой(-ых) валюте(-ах), проценты по которому необходимо забрать вместе с суммой вклада в тот же день поздним вечером (уже после закрытия касс обмена валюты).

Ставки процентов за 1 день по кредитам и вкладам приведены в следующей таблице:

валюта	кредит	вклад
€	1,5 %	1 %
\$	2,25 %	1,5 %
ф	3 %	2 %

В понедельник утром Центральный банк Фантии объявил следующие обменные курсы на ближайшие три дня:

	Понедельник	Вторник	Среда
ф за один €	43	43,4	43,1
ф за один \$	33	32,9	33,6
\$ за один €	1,28	1,36	1,3

Например, в понедельник можно обменять 43 фантика на 1 евро и, наоборот, 1 евро на 43 фантика.

Представьте, что Вы — гражданин Фантии, у которого на руках есть 100 фантиков. Какое максимальное количество фантиков вы могли бы заработать к вечеру среды, если:

- по закону запрещено иметь иностранную валюту на руках в конце дня?
- можно иметь иностранную валюту на руках в том числе и в конце дня?

Приведите алгоритм Ваших действий и число фантиков, которое будет у Вас к вечеру среды.

**Решение.**

**а)** Поскольку иметь на руках доллары или евро в конце дня запрещено, существует только два способа получить доход: «крутить» деньги в течение одного дня между валютами, зарабатывая на разнице курсов (получение такого безрискового дохода называется арбитражем), или класть деньги в банк под проценты, причем из-за условий задачи в банк можно класть только фантики. Так как  $33 \times 1,28 = 42,24 < 43$ , то в понедельник самой выгодной из арбитражных схем является схема «фантики  $\rightarrow$  доллары  $\rightarrow$  евро  $\rightarrow$  фантики»; так как  $32,9 \times 1,36 = 44,744 > 43,4$  и  $33,6 \times 1,3 = 43,68 > 43,1$ , то во вторник и среду самой выгодной из арбитражных схем является схема «фантики  $\rightarrow$  евро  $\rightarrow$  доллары  $\rightarrow$  фантики». Рассмотрим доходность по каждой из двух операций в каждый из трех дней, они приведены в таблице ниже.

	Процент с депозита	Валютный арбитраж
Понедельник	2%	$((100 : 33) : 1,28) \times 43 \approx 101,8 \Rightarrow 1,8\%$
Вторник	2%	$((100 : 43,4) \times 1,36) \times 32,9 \approx 103,1 \Rightarrow 3,1\%$
Среда	2%	$((100 : 43,1) \times 1,3) \times 33,6 \approx 101,3 \Rightarrow 1,3\%$

Следовательно, оптимальная стратегия выглядит следующим образом. В понедельник утром относим деньги в банк и кладем на депозит. К вечеру у нас будет 102 фантика. Во вторник с каждого фантика мы можем заработать примерно 3,1%; это больше, чем ставка по кредиту. Тогда во вторник утром мы возьмем в кредит у банка 102 фантика, и у нас будет 204 фантика. После этого с помощью арбитража мы заработаем  $204 \times 1,031 = 210,324$  фантика. Вечером банку нужно вернуть взятые в кредит деньги, а также вернуть 3% за их использование. Тогда к концу вторника у нас останется  $210,324 - 102 \times 1,03 \approx 210,324 - 105,06 = 105,264$  фантика. В среду, как и в понедельник, выгодно положить деньги на депозит. Тогда к концу среды наш счет будет составлять примерно  $105,264 \times 1,02 \approx 107,369$  фантика.

Отметим, что это не точное значение, а лишь его приближенная оценка. Чтобы получить точное значение, необходимо отказаться от всех округлений, которые мы совершали.

**б)** Здесь вариативность стратегий резко возрастает, так как появляется возможность брать кредиты и делать вклады в других валютах, нежели только фантики, и, самое важное, играть на обесценении валют в течение ночи.

Рассмотрим все возможные наборы стратегий.

Рассмотрим сначала операцию кредитования. Из пункта а) нам известно, что доходность от арбитража 1,8%. Единственная кредитная ставка, которая меньше – кредит по евро. Но на начало дня у нас на руках фантики, таким образом в первый день брать кредит не будем. Во вторник доходность арбитража 3,096%. Это больше, чем кредит по любой из валют, и, таким образом во вторник при любой операции имеет смысл брать кредит. В среду самый маленький доход от арбитража, и потому брать кредит не имеет смысла.

Рассмотрим пока ситуацию, когда мы ни разу за три дня не клали деньги в банк.

Назовем *профилем стратегии* выбор валюты на руках в конце периода. Так как в среду мы в конце дня должны иметь на руках фантики, у нас 9 (=3\*3) возможных профилей.

Стратегия	На руках в конце понедельника	На руках в конце вторника	На руках в конце среды
1	ф*	Ф*	ф*
2	Е*	Ф*	Ф*
3	S	Ф	Ф*
4	ф*	Е	Ф*
5	Е*	Е*	Ф*
6	S	Е*	Ф*
7	ф*	S*	Ф
8	Е*	S	Ф
9	S	S*	Ф

Звездочками отмечены те позиции, при которых имеет место арбитраж. Арбитраж получается, когда мы делаем более одной операции в цепочке  $\text{ф} \rightarrow \$ \rightarrow \text{€} \rightarrow \text{ф}$  для понедельника (т.е. мы получим больше, нежели просто переведем деньги в данную валюту прямым обменом; при одинаковой валюте в начале и конце дня прямой обмен означает отказ от операций с валютой), и  $\text{ф} \rightarrow \text{€} \rightarrow \$ \rightarrow \text{ф}$  для вторника и среды

Осталось заметить еще одну вещь. Даже если во второй день по стратегии невозможен арбитраж (если мы закончили, например, понедельник с долларами, а вторник хотим закончить с фантиками), то кредит все равно имеет смысл брать. Поясним. Рассмотрим самый дорогой кредит — в фантиках. При этом, поскольку мы хотим рассмотреть стратегию без арбитража, то предположим, что мы рассматриваем стратегию 8.

Взяв кредит на  $X$  фантиков под 3% мы должны будем в конце дня вернуть  $1,03X$ . В то же время мы на арбитраже заработаем  $1,03096X$ . Таким образом, чтобы вернуть кредит, нам достаточно прокрутить  $1,03/1,03096 = 0,99906X$ . Оставшуюся сумму в  $0,0009X$  мы можем использовать по своему усмотрению, например, согласно стратегии 8 конвертировать в доллары. Т. е. конвертировать всю сумму наличных фантиков, включая кредитные, в евро, потом в доллары, а в фантики обернуть третьим шагом только сумму необходимую для погашения кредита.

Поскольку это работает для самого дорогого кредита, эта стратегия верна и для более дешевых ставок.

Сопоставим изменения в относительной стоимости валют:

ф/€	43	$1,009302 = 43,4/43$	43,4	$0,993088 = 43,1/43,4$	43,1
ф/\$	33	$0,99697 = 32,9/33$	32,9	$1,021277 = 33,6/32,9$	33,6
\$/€	1,28	$1,0625 = 1,36/1,28$	1,36	$0,955882 = 1,3/1,36$	1,3

Исходя из этой таблицы, с понедельника на вторник выгодней всего хранить в евро (укрепился относительно и фантика и доллара), а со вторника на среду хранить деньги в долларах. Наименее выгодно заканчивать понедельник с долларами, а среду с евро.

Однако у этой стратегии есть недостаток — два дня из трех придется работать без арбитража.

Рассмотрим каждую из 9 стратегий.

Стратегии 1, 4 и 7, согласно расчетам пункта а), уступают по доходности операции по вложению денег в банк в понедельник. Оставим рассмотрение аналога этих стратегий с вкладом до раздела с операциями по вкладам. Аналогичным образом в стратегиях 2 и 3 выгодней в среду положить деньги в банк.

Таким образом, осталось рассчитать доходность по стратегиям 5, 6, 8 и 9.

- 5: В конце понедельника имеем 2,3674 евро (только арбитраж). Во вторник берем кредит полностью крутим всю наличность опять до евро и гасим кредит. Остается 2,4785 евро. В среду арбитражем получаем 108,26 фантиков.
- 6: В конце понедельника без арбитража получаем 3,0303 доллара. Во вторник берем кредит на все доллары, крутим до евро, после этого конвертируем в доллары только сумму для погашения. Удвоив сумму, получим в евро  $6,0606 \times 32,9/43,4 = 4,5943$  евро, из которых  $3,0303 \times 1,0225/1,36 = 2,2783$  нужно конвертировать в доллары и отдать на погашение кредита. Остается 2,316 евро. В среду арбитражем получим 101,1643 фантика.
- 8: В конце понедельника с арбитражем получаем 2,3674 евро. Операция с кредитом с евро позволяет выволить  $1 - 1,015/1,03096 = 0,01548$  от исходной суммы что составит 0,03665 евро. Вместе с исходными прямая конвертация в доллары даст  $2,4041 \times 1,36 = 3,268$  доллара. В среду без арбитража получим 109,85 фантиков.
- 9: В конце понедельника без арбитража получаем 3,0303 доллара. Во вторник берем кредит и полностью прокручиваем. Получаем 3,1498 доллара, что меньше чем в стратегии 8.

Рассмотрим операции с вкладом. Отметим, что доходность арбитража во вторник (сопоставимо с вкладом, так как конечная и начальная валюта в обоих случаях совпадает) выше ставки вклада. Поэтому во вторник делать вклад не потребуется.

Рассмотрим упущенные стратегии 1, 2, 3, 4, 7 в предпосылке, что на некоторых шагах выгоднее делать вклад.

- 1: В понедельник имеем 102 фантика. Во вторник берем кредит, крутим получаем 102,2558. В среду опять кладем в банк и получаем 107,361.
- 2: В конце понедельника имеем 2.3674 евро. Берем кредит в евро, крутим до фантиков (211,8561), остаток для погашения кредита в размере  $2,3674 \times 1,015 = 2,4029$  конвертируем в евро. Получаем на конец вторника 107,56 фантиков. В среду кладем в банк и получаем 109,72 фантика.
- 3: В конце понедельника без арбитража получаем 3,0303 доллара. Берем кредит в долларах все за один шаг превращаем в фантики (199,3939), а остаток для погашения крутим опять до долларов. В конце дня имеем 100,5158, что сильно хуже стратегии 2.
- 4: В понедельник имеем 102 фантика. Во вторник берем кредит, крутим до евро, остаток для погашения долга перекидываем до фантиков. На руках остается 2,3524 евро. Что меньше, чем в стратегии 5.
- 7: В понедельник имеем 102 фантика. Во вторник берем кредит, крутим до доллара, далее конвертируем сумму, необходимую для погашения кредита. На руках остается 3,1993 доллара. Что меньше, чем в стратегии 8.

Таким образом, наиболее выигрышной стратегией, как и было предсказано, является стратегия 8 с результатом 109,85.

### Задача 11.

(22 балла)

В крайнем подъезде трехэтажного общежития живут три студента-медика, каждый на своем этаже. Лифта в подъезде нет. Студенты не любят грязь, поэтому они решили скинуться и нанять уборщицу, которая бы мыла лестничные площадки напротив каждой квартиры.

Удовольствие студента зависит от того, сколько чистых площадок он встречает на пути домой. Кроме того, чем больше лестничных площадок проходит студент, пока идет домой, тем более он терпим к грязи.

Удовлетворение студента, живущего на  $i$ -м этаже, можно описать формулой:

$$U_i = 20 - (4 - i) \times (i - x)^2 - 2y,$$

где  $x$  — число чистых этажей на пути студента к своей комнате, а  $y$  — то число вымытых этажей, которое он профинансировал из своего кармана. В случае, если у студента одинаковое удовлетворение от финансирования мытья разного количества этажей, он предпочтет тот вариант, где ему приходится тратить меньше.

Уборщица готова мыть одну площадку за 2 доллара. При этом вне зависимости от того, кто платит, работать она начинает с нижнего этажа, потом моет второй и только потом — третий. Таким образом, студент не может заставить уборщицу помыть его этаж, если не помыты все более низкие этажи. Например, если уборщице заплатили 4 доллара, то она помоеет только 1-й и 2-й этажи независимо от того, кто платил.

В начале месяца каждый студент сообщает, уборку скольких этажей он собирается профинансировать. Каждый студент может профинансировать уборку любого целого числа этажей. Студенты дают свои обещания одновременно. Назовем *равновесием* такой набор обещаний студентов, когда ни одному из студентов по отдельности не выгодно его пересмотреть после того, как все узнали обещания друг друга.

**а)** Сколько этажей будет вымыто в равновесии? Кто и в каком размере оплатит услуги уборщицы?

**б)** Уборщица решила изменить свои привычки, и теперь она моет этажи сверху вниз (сначала третий, потом второй и только потом первый). Как изменятся ответы на вопросы пункта а)?

**в)** Проработав пару недель, уборщица поняла, что первый этаж является самым грязным, так как по нему ходят три человека. Второй этаж в полтора раза чище, а площадка на третьем этаже, куда доходит только один студент, и вовсе в три раза чище той, что на первом этаже. Она решила, что по-прежнему готова брать за мытье всего подъезда 6 долларов, но только теперь оплата будет взиматься пропорционально загрязненности этажа: 3 доллара за первый этаж, 2 — за второй и 1 — за третий.

Каждый из студентов может потратить любую сумму от 0 до 6 долларов. Это решение студенты принимают одновременно. Далее уборщица смотрит на полученную сумму и вычисляет, на уборку скольких этажей этого хватает. Если при этом у нее остается излишек, которого не хватает для оплаты уборки следующего этажа, то она этот излишек никому не возвращает и следующий этаж не моет.

Соответственно, удовлетворение студента, живущего на  $i$ -м этаже, в этом случае можно описать формулой:

$$U_i = 20 - (4 - i) \times (i - x)^2 - z,$$

где  $z$  — это число профинансированных из своего кармана долей загрязненности от общего числа 6, а все остальные обозначения имеют прежний смысл. Как в этом случае изменятся ответы на вопросы пунктов а) и б)?

**г)** Предположим, что теперь решение о том, сколько платить уборщице, принимают не студенты, а управляющая домом компания. Управляющая компания стремится максимизировать суммарную полезность трех студентов. К каким исходам это приведет в условиях пунктов а), б), в)? Как изменится суммарная полезность трех студентов в условиях пунктов а), б), в) при наличии управляющей компании?

**Решение.** Будем называть первым, вторым и третьим студентов, живущих на первом, втором и третьем этаже соответственно, через  $x, y$  и  $z$  будем обозначать их *стратегии* — суммы, которые каждый из них потратит на уборку, а через  $U_i(x, y, z)$  — полезность  $i$ -го студента при условии, что первый потратил  $x$ , второй потратил  $y$ , а третий потратил  $z$ . Будем искать равновесные *профили стратегий* — наборы  $(x, y, z)$ , такие, что ни один из студентов не захочет изменить свою стратегию при фиксированных стратегиях остальных студентов.

**а)** По условию каждый студент может профинансировать уборку любого целого числа этажей, поэтому  $x, y, z \in \{0, 2, 4, 6\}$ .

1) Первому студенту не имеет никакого смысла оплачивать уборку более чем одного этажа, а второму — больше двух. Поэтому в равновесии  $x \in \{0, 2\}$  и  $y \in \{0, 2, 4\}$ .

2) Профиль  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  не является равновесием, поскольку второму студенту выгодно отклониться и профинансировать уборку одного этажа:  $U_2(0, 0, 0) = 12 < 16 = U_2(0, 2, 0)$ .

3) Профиль  $(x, y, z) = (2, 0, 0)$  не является равновесием, поскольку третьему студенту выгодно отклониться и профинансировать уборку одного этажа:  $U_3(2, 0, 0) = 16 < 17 = U_3(2, 0, 2)$ .

4) Из пунктов 1—3 следует, что профили, в которых  $y = z = 0$ , не являются равновесиями. Значит, в равновесии хотя бы один из двух студентов — второй или третий — платит ненулевую сумму денег.

5) Студент, живущий на первом этаже, в равновесии не будет оплачивать ни одного этажа, если любой из живущих выше профинансирует хотя бы один этаж. Поэтому из  $yz \neq 0$  следует  $x = 0$ .

6) Из пунктов 4—5 следует, что в равновесии первый студент ничего не платит:  $x = 0$ .

7) Рассмотрим случай  $x = y = 0$ . Заметим, что  $U_3(0, 0, 4) = 15 > 14 = U_3(0, 0, 2) = U_3(0, 0, 6) > 11 = U_3(0, 0, 0)$ . Значит, если первый и второй студенты не скидываются на уборщицу, то третий предпочтет оплатить помывку двух этажей.

8) Легко проверить, что  $(0, 0, 4)$  — равновесие. Это следует из пункта 7, а также из того, что первому и второму студенту не имеет смысла что-либо платить уборщице, когда третий студент оплатил уборку первых двух этажей.

9) Рассмотрим случай  $x = 0, y = 2$ . Заметим, что в равновесии  $z \notin \{4, 6\}$ , так как в противном случае второй студент действует неоптимально, платя что-то в ситуации, когда третий студент уже оплатил уборку второго этажа.

10) Легко видеть (см., например, пункт 3), что  $U_3(0, 2, 0) = 16 < 17 = U_3(0, 2, 2)$ . Поэтому профиль  $(0, 2, 0)$  не является равновесием.

11) Убедимся, что  $U_2(0, 2, 2) = U_2(0, 0, 2) = 18$ . По условию в случае одинаково прибыльных альтернатив студент предпочитает ту, в которой он платит меньше. Значит, для второго студента профиль  $(0, 0, 2)$  предпочтительнее профиля  $(0, 2, 2)$ . Из этого следует, что  $(0, 2, 2)$  — не равновесие.

12) Рассмотрим случай  $x = 0, y = 4$ . Заметим, что в равновесии  $z = 0$ , так как в противном случае второй студент действует неоптимально, платя  $y = 4$ . Но  $U_2(0, 4, 0) = U_2(0, 2, 0) = 16$ , поэтому, в силу условия, второй студент предпочитает профиль  $(0, 2, 0)$  профилю  $(0, 4, 0)$ . Следовательно, профиль  $(0, 4, 0)$  не является равновесием.

13) Из пунктов 1 и 7—12 следует, что в пункте а) этой задачи есть ровно одно равновесие, когда третий студент оплачивает уборку двух этажей, а остальные студенты не платят ничего:  $(x, y, z) = (0, 0, 4)$ .

**б)**



1) Рассмотрим первого студента. Он может гарантировать себе полезность, равную как минимум 17, если не будет ничего платить.

2) В силу пункта 1 первый студент никогда не будет платить больше 2 долларов.

3) Первый студент будет оплачивать уборку одного этажа в том и только в том случае, если два других студента оплатили ровно два этажа (тогда полезность первого студента равна 18, в то время как грязный первый этаж принесет ему полезность не более 17).

4) Пусть  $x = 2$ . Тогда, в соответствии с пунктом 3,  $y + z = 4$ . Профиль  $(2, 0, 4)$  не является равновесием, так как третьему студенту будет лучше уменьшить его долю до 2. Профиль  $(2, 2, 2)$  не является равновесием, так как третьему студенту лучше вообще ничего не платить. Профиль  $(2, 4, 0)$  не является равновесием, так как второму студенту выгоднее оплатить уборку только одного этажа (по условию задачи, если полезность одинакова, студент предпочтет тот вариант, в котором он платит меньше денег). Следовательно, в равновесии  $x \neq 2$ . Поэтому  $x = 0$ .

5) Пусть  $x = 0$ . Если  $y + z = 0$  или  $y + z = 2$ , то это не равновесие, так как третьему студенту будет выгоднее профинансировать уборку еще одного этажа.

6) Если  $x = 0$  и  $y + z = 4$ , то это не равновесие в силу пункта 3.

7) Пусть  $x = 0$  и  $y + z = 6$ . Если  $y = 2$ ,  $y = 4$  или  $y = 6$ , то второму студенту будет выгоднее изменить свое решение и уменьшить свои расходы на 2 доллара. Если  $y = 0$  и  $z = 6$ , то третьему студенту выгоднее уменьшить свои расходы на 2 доллара.

Таким образом, в пункте б) нет равновесий.

**в) а)**

1) Очевидно, что первому студенту нет смысла финансировать помывку второго и третьего этажа. Поэтому  $x \leq 3$ .

2) Если  $x > 0$  и  $x + y + z \neq 3$ , то это не равновесие. Действительно, если  $x + y + z > 3$ , то первый студент мог бы сэкономить — первый этаж и так будет помыт. А если  $x + y + z < 3$ , то первый студент выбрасывает деньги на ветер.

3) Заметим, что если  $x + y + z = 3$ , то есть профинансирована уборка одного этажа, то независимо от распределения расходов студентов третьему студенту будет выгоднее доплатить еще 3 доллара за уборку оставшихся двух этажей (на этом он экономит 4 единицы неудовольствия). Значит, профили, такие, что  $x + y + z = 3$ , не являются равновесиями.

4) Пусть  $x = 0$ . Если  $y + z = 0$ , то это не равновесие, так как третьему студенту будет выгоднее оплатить уборку первого этажа. Если  $y + z \in \{1, 2, 4\}$ , то этот профиль не является равновесием, так как второй или третий студент тратит деньги впустую. Если  $y + z = 3$ , то это не равновесие по пункту 3).

5) Пусть  $x = 0$  и  $y + z = 5$ . Легко непосредственной проверкой убедиться, что профили  $(0, 1, 4)$ ,  $(0, 0, 5)$  являются равновесиями. Профили, в которых  $y \geq 2$ , равновесиями не являются, так как второму выгодно уменьшить свой платеж на 2 (при том же уровне полезности он заплатит меньше).

6) Если  $x = 0$  и  $y + z = 6$ , то равновесий нет: если  $z > 0$ , то третьему выгодно уменьшить платеж на 1, а если  $z = 0$ , то второй зря оплачивает уборку третьего этажа.

Таким образом, есть 2 равновесия:  $(0, 1, 4)$  и  $(0, 0, 5)$ .

**в) б)**

1) Как и в пункте б), первый студент никогда не будет платить больше 2 долларов.

2) Если первый студент тратит больше нуля, то в сумме оплачивается уборка всех этажей (иначе первому бы стало лучше, если бы он ничего не платил). Другими словами, если  $x > 0$ , то  $x + y + z = 6$ .

3) Если  $x + y + z = 6$ , то  $z = 0$ . Действительно, если  $z > 0$ , то третьему студенту выгоднее потратить на 1 доллар меньше. Тогда первый этаж не будет вымыт, третий студент получит тот же уровень полезности, но заплатит меньше.

4) Если  $x + y + z = 6$ , то  $y \leq 1$ . Если бы было  $y > 1$ , то второму студенту было бы выгодно уменьшить свой вклад на 2.

5) Из пунктов 2—4 следует, что равновесий в случае  $x > 0$  быть не может. Следовательно,  $x = 0$ .

6) Пусть  $x = 0$ . Если  $y + z < 3$ , то это не равновесие, поскольку третьему студенту будет выгодно добавить столько денег, чтобы хватило на уборку двух верхних этажей. Если  $y + z \in \{4, 5\}$ , то кто-то из студентов отдает уборщице деньги задаром. Случай  $y + z = 6$  не может быть равновесием в силу пунктов 3 и 4.

7) Остается случай  $x = 0$ ,  $y + z = 3$ . Легко проверить, что все такие профили являются равновесиями. Сейчас убираются два этажа, и никому не выгодно увеличивать свой платеж на 3, чтобы оплатить уборку еще одного этажа. Уменьшать свой платеж второму или третьему нет никакого смысла — штраф за грязь будет больше.

Таким образом, равновесия в этом пункте такие:  $(0, 0, 3)$ ,  $(0, 1, 2)$ ,  $(0, 2, 1)$ ,  $(0, 3, 0)$ .

г) а) Суммарная полезность трех студентов в зависимости от числа вымытых этажей  $n$  равна

$$U(n) = 60 - 3 \times (1 - \min\{n, 1\})^2 - 2 \times (2 - \min\{n, 2\})^2 - (3 - \min\{n, 3\})^2 - 2n.$$

Нам достаточно сравнить значения функции  $U(n)$  при  $0 \leq n \leq 3$ . Легко видеть, что

$$U(0) = 40, \quad U(1) = 52, \quad U(2) = 55, \quad U(3) = 54.$$

Таким образом, общественный максимум будет при двух мытых этажах. Суммарная полезность студентов по сравнению с равновесием из пункта а) не изменится.

г) б) Теперь суммарная полезность трех студентов в зависимости от числа вымытых этажей  $n$  равна

$$U(n) = 60 - 3 \times (1 - \max\{(n - 2), 0\})^2 - 2 \times (2 - \max\{(n - 1), 0\})^2 - (3 - \max\{n, 0\})^2 - 2n.$$

Вычислим значения функции  $U(n)$  при  $0 \leq n \leq 3$ :

$$U(0) = 40, \quad U(1) = 43, \quad U(2) = 50, \quad U(3) = 54.$$

Следовательно, общественно оптимальным вариантом является уборка трех этажей. Напомним, что в пункте б) равновесий не было!

г) в) а) В этом пункте суммарная полезность трех студентов может быть представлена в виде

$$U(n) = 60 - 3 \times (1 - \min\{n, 1\})^2 - 2 \times (2 - \min\{n, 2\})^2 - (3 - \min\{n, 3\})^2 - a(n),$$

где

$$a(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 0; \\ 3, & \text{если } n = 1; \\ 5, & \text{если } n = 2; \\ 6, & \text{если } n = 3. \end{cases}$$

Тогда

$$U(0) = 40, \quad U(1) = 51, \quad U(2) = 54, \quad U(3) = 54.$$

В силу предпосылки задачи, управляющая компания опять выберет мытье 2 этажей. Для обоих допустимых здесь равновесий из задачи в)а) суммарная полезность студентов не изменится.

**г) в) б)** Наконец, здесь суммарная полезность трех студентов равна

$$U(n) = 60 - 3 \times (1 - \max\{(n - 2), 0\})^2 - 2 \times (2 - \max\{(n - 1), 0\})^2 - (3 - \max\{n, 0\})^2 - b(n),$$

где

$$b(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 0; \\ 1, & \text{если } n = 1; \\ 3, & \text{если } n = 2; \\ 6, & \text{если } n = 3. \end{cases}$$

Поэтому

$$U(0) = 40, \quad U(1) = 44, \quad U(2) = 51, \quad U(3) = 54.$$

Значит, управляющая компания наймет уборщицу для мытья всех трех этажей. По сравнению с пунктом в) б), управляющая компания добилась улучшения общественного благосостояния.