S001. В одном захолустном городе открыли ретро-кинотеатр. В этом кинотеатре круглые сутки показывают короткометражные фильмы с участием Чарли Чаплина и Бастера Китона, причем каждый сеанс продолжается ровно час. Поскольку фильмы немые, для их озвучивания кинотеатр нанимает тапёров. К сожалению, во всем городе только два человека умеют играть на фортепиано – Бетховенко и Шопенский. Бетховенко хорошо играет с утра, пока трезвый. Через некоторое время, наклюкавшись, он начинает путать ноты, клавиши и педали, и по этому поводу громко ругается. Поэтому на первый сеанс, который озвучивает Бетховенко, приходит 255 человек, на второй сеанс – 245, на третий – 235 и т.д. Учитывая это, через некоторое количество сеансов администрация отправляет Бетховенко домой, а его место за роялем занимает Шопенский. Он озвучивает все сеансы до утра, а потом его опять сменяет Бетховенко. Шопенский всегда играет громко, аккуратно и без ошибок, но, к сожалению, он знает только одно музыкальное произведение – собачий вальс. Поэтому на каждый сеанс с участием Шопенского всегда приходит всего лишь 100 человек.

Цена билета на один сеанс равна 1 рублю. Эту цену установили местные власти, и администрация кинотеатра изменить ее не может. Разумеется, эта цена известна тапёрам. Почасовая оплата тапёров определяется следующим образом. Сначала директор кинотеатра в отсутствие Шопенского спрашивает у Бетховенко, сколько рублей за один сеанс он хотел бы получать. В этот момент Бетховенко еще не знает, какую цену запросит Шопенский и сколько сеансов в сутки администрация отдаст ему и Шопенскому. Затем директор в отсутствие Бетховенко сообщает Шопенскому, какую ставку зарплаты за час запросил Бетховенко и, в свою очередь, спрашивает у Шопенского, сколько он хотел бы получать за час игры (при этом Шопенский опять-таки не знает, как будут распределены сеансы между ним и Бетховенко). Поставленный перед фактом, Шопенский принимает как должное условия Бетховенко и называет свою цену. После этого администрация определяет, сколько сеансов в сутки будет озвучивать тот и другой тапёр. Для простоты будем считать, что все расходы кинотеатра – это оплата игры тапёров.

Известно, что администрация пытается минимизировать убытки этого дурацкого кинотеатра, дотируемого местным управлением культуры, а Бетховенко и Шопенский пытаются максимизировать свои доходы. Учитывая это, определите, сколько сеансов в сутки достанется каждому тапёру, а также рассчитайте почасовую оплату каждого из них.

Решение

Пусть w_1 – почасовая оплата Бетховенко, w_2 – почасовая оплата Шопенского, t – число часов (сеансов) в сутки для Бетховенко, $(24 – t)$ – для Шопенского.

Прежде чем запросить ставку w_1, Бетховенко будет рассуждать следующим образом. Очевидно, узнав величину w_1, Шопенский запросит себе какую-то ставку w_2. Учитывая w_1 и w_2, кинотеатр найдет такую величину t, которая будет максимизировать его прибыль (и минимизировать убытки). Зная это, Шопенский рассчитает такую ставку w_2, при которой кинотеатр, максимизируя прибыль, обеспечит такое значение $(24 – t)$, которое для каждого данного значения w_1 будет максимизировать доход Шопенского.

То есть для каждого установленного Бетховенко значения w_1 Шопенский и кинотеатр будут устанавливать w_2 и t, максимизирующие их доходы при заданном w_1, и одновременно косвенно определять доход самого Бетховенко. Поэтому задача Бетховенко заключается в том, чтобы найти такое значение w_1, которое, учитывая поведение Шопенского и кинотеатра, будет максимизировать его собственный доход.

Итак, пусть в ответ на w_1 Шопенский запросил w_2.

Прибыль кинотеатра: $\pi = R - TC =$

$= (\textit{Выручка от сеансов Бетховенко}) + (\textit{Выручка от сеансов Шопенского}) - w_1 t - w_2(24 - t) =$

$= [255 + 245 + 235 + \ldots + 255 - 10\times (t-1)]\, t \times 1 + 100\times (24 - t)\times 1 - w_1 t - 24w_2 + w_2 t =$

$= \dfrac{255 + 265 - 10t}{2} \times t + 2400 - 100t - w_1 t - 24w_2 + w_2 t = -5t^2 + 160t + 2400 - w_1 t - 24w_2 + w_2 t$.

Величины w_1 и w_2 являются для кинотеатра заданными (экзогенными), поэтому максимум прибыли кинотеатра достигается при условии: $\dfrac{d\pi}{dt} = -10t + 160 - w_1 + w_2 = 0.$

$t = 16 - 0{,}1w_1 + 0{,}1w_2$.

Отсюда следует, что доход Шопенского будет равен:
$w_2(24 - t) = w_2\,(24 - 16 + 0{,}1w_1 - 0{,}1w_2) = 8w_2 + 0{,}1w_1w_2 - 0{,}1w_2^2$. Поскольку величина w_1 для Шопенского задана (он может определять только w_2), максимум его дохода определяется из условия: $8 + 0{,}1w_1 - 0{,}2w_2 = 0$.

Тем самым мы получаем *уравнение реакции* почасовой ставки Шопенского (w_2) на почасовую ставку Бетховенко (w_1): $w_2 = 40 + 0{,}5w_1$.

$t = 16 - 0{,}1w_1 + 0{,}1w_2 = 16 - 0{,}1w_1 + 0{,}1(40 + 0{,}5w_1) = 20 - 0{,}05w_1$.

Доход Бетховенко: $w_1t = w_1(20 - 0{,}05w_1) = 20w_1 - 0{,}05w_1^2$. $20 - 0{,}1w_1 = 0$. $w_1 = 200$. $w_2 = 40 + 0{,}5w_1 = 40 + 100 = 140$. $t = 16 - 0{,}1w_1 + 0{,}1w_2 = 10$. $24 - t = 14$.

Ответ. Почасовая оплата Бетховенко – 200 рублей, он получит 10 сеансов. Почасовая оплата Шопенского – 140 рублей, ему отдадут 14 сеансов.

S002. Однажды Клара задолжала Карлу 8 001 953 125 марок. Вместо того чтобы выплатить эту сумму немедленно, Клара предложила Карлу следующим образом реструктурировать долг: через год она заплатит ему N миллиардов марок (N – целое число миллиардов), еще через год – сумму, равную ($N - 1$) миллиардов, еще через год – ($N - 2$) миллиардов и так далее. Таким образом, последний платеж по долгу составит ровно один миллиард марок.

Карл напомнил Кларе, что сегодня в их стране, в условиях нестабильной экономической ситуации, ставка процента составляет 100% годовых, поэтому по предложенной ею схеме реструктуризации долга придется возвращать очень большие суммы. Где она найдет столько денег? «Не твое дело, – грубо ответила Клара. – Женщина всегда найдет способ, как заработать». На том и порешили. Определите величину N (сумму первого платежа), а также число лет, в течение которого Клара будет выплачивать долг.

Решение

Для того чтобы упростить расчеты, предположим, что единица (1) – это один миллиард марок. Очевидно, что в соответствии с предложенной Кларой схемой последний платеж будет совершен через N лет.

$$8{,}001\,953\,125 = PV = \frac{N}{2} + \frac{N-1}{2^2} + \frac{N-2}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^N}.$$

Представим величину PV следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{N-2}} + \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{2^N} = \frac{0{,}5\,(1-0{,}5^N)}{1-0{,}5} = 1 - 0{,}5^N\\
&\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{N-2}} + \frac{1}{2^{N-1}} = \frac{0{,}5\,(1-0{,}5^{N-1})}{1-0{,}5} = 1 - 0{,}5^{N-1}\\
&\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{N-2}} = \frac{0{,}5\,(1-0{,}5^{N-2})}{1-0{,}5} = 1 - 0{,}5^{N-2}\\
&\ldots \qquad\qquad \ldots \qquad\qquad \ldots\\
&\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{0{,}5\,(1-0{,}5^2)}{1-0{,}5} = 1 - 0{,}5^2\\
&\frac{1}{2} = \frac{0{,}5\,(1-0{,}5)}{1-0{,}5} = 1 - 0{,}5
\end{aligned}\right\}\; PV$$

Здесь и далее используется формула суммы N членов геометрической прогрессии:
$S_N = \dfrac{b_1(1-q^N)}{1-q}$.

$PV = (1 - 0{,}5) + (1 - 0{,}5^2) + \ldots + (1 - 0{,}5^{N-2}) + (1 - 0{,}5^{N-1}) + (1 - 0{,}5^N) =$

$= N - (0{,}5 + 0{,}5^2 + \ldots + 0{,}5^{N-2} + 0{,}5^{N-1} + 0{,}5^N) = N - \dfrac{0{,}5(1-0{,}5^N)}{1-0{,}5} = N - 1 + 0{,}5^N.$

Таким образом, 8,001 953 125 = $N - 1 + 0{,}5^N$. N целое, поэтому $N - 1 = 8$. $N = 9$. (Что касается величины $0{,}5^N$, то она представляет собой дробную часть долга: $0{,}5^N =$ 0,001 953 125).

Ответ. $N = 9$ миллиардам марок, долг будет выплачиваться в течение 9 лет.

Примечание

В этой задаче можно сделать простую проверку правильности ответа:

$$PV = \frac{9\,000\,000\,000}{2} + \frac{8\,000\,000\,000}{2^2} + \frac{7\,000\,000\,000}{2^3} + \ldots + \frac{1\,000\,000\,000}{2^9} =$$

= 8 001 953 125.

S003. В результате кризиса книгоиздания на книжном рынке осталось единственное издательство-монополист под названием Учпедгиз. Функция спроса на каждую его новую книгу является линейной, при этом каждый покупатель приобретает не более одной книги. Несколько лет назад Учпедгиз через своих лоббистов в Думе добился принятия закона, запрещающего перепродавать книги данного издательства на вторичном (букинистическом) рынке. Если вы купили книгу Учпедгиза в книжном магазине, то вы либо должны хранить ее вечно, либо уничтожить, если она вам не нужна.

Ассоциация потребителей, собравшись с силами и наняв лучших адвокатов, затеяла судебный процесс с целью отмены вышеуказанного закона. Это стало поводом для внеочередного собрания директоров Учпедгиза, на котором предполагалось обсудить тактику издательства на судебном процессе и меры противодействия Ассоциации потребителей. Один из участников собрания выступил с неожиданным предложением: не препятствовать отмене закона и предоставить право всем покупателям *один раз* перепродать на вторичном рынке каждую новую книгу, купленную в книжном магазине издательства. А вот тот человек, который купил книгу у первого ее покупателя, уже не может кому-либо ее перепродавать.

Аргументация этого участника собрания была следующая: *абсолютно все* покупатели, прочитавшие книгу, при первой возможности от нее избавятся; а если в момент покупки книги в книжном магазине Учпедгиза они будут знать, что книгу можно будет перепродать на вторичном рынке, то цена вторичного рынка будет играть для них роль потоварной субсидии. Это значит, что на первичном книжном рынке, где торгует Учпедгиз, спрос вырастет, а соответственно вырастет и максимальная выручка издательства. Кстати, целью деятельности Учпедгиза является максимизация выручки.

Предположим, данный участник собрания прав. Насколько вырастет максимальная выручка издательства от издания каждой новой книги, если сделать всё так, как он предлагает?

Решение

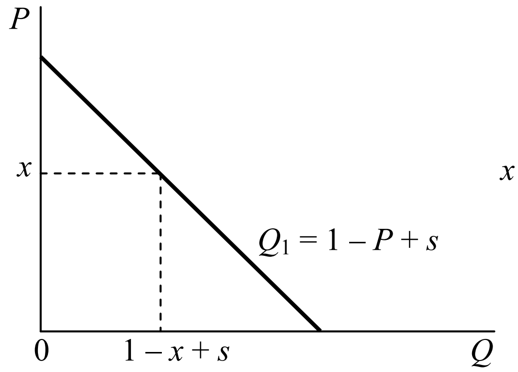
Пусть функция спроса на новую книгу имеет вид: $Q = 1 - P$. Если покупатели не могут перепродавать приобретенную книгу, то максимальная выручка издательства очевидно, равна 0,25. Предположим, покупателям дали право перепродать прочитанную книгу на вторичном (букинистическом) рынке, где они могут выручить за нее s денежных единиц (которые фактически являются субсидией, учитываемой ими при приобретении новой книги). В этих условиях первоначальная функция спроса принимает следующий вид: $Q_1 = 1 - P + s$.

Обратите внимание: такой новый вид функция спроса будет иметь только для тех покупателей, которые фактически приобретут книгу на первичном рынке (т.е. в книжном магазине), имея в виду перепродать книгу на вторичном рынке.

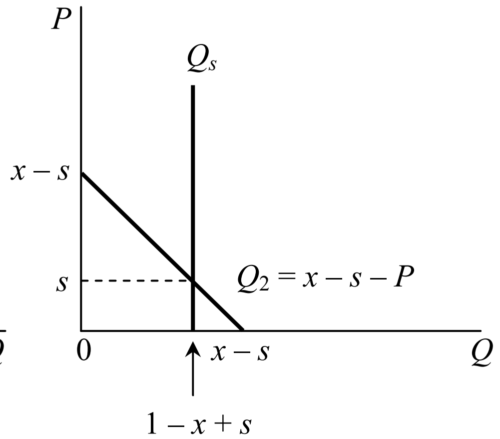
Предположим, в этих новых условиях издательство установило цену x на новую книгу. Тогда объем спроса на первичном рынке составит: $Q_1 = 1 - x + s$. Это значит, что на вторичном рынке, где останутся покупатели, согласные приобрести книгу за цену, меньшую x, максимальное число покупателей будет равно: $1 - (1 - x + s) = x - s$. Эти покупатели уже не смогут перепродать приобретенные книги (и получить «субсидии»), поэтому их линия спроса на вторичном рынке будет представлять собой фрагмент первоначальной линии спроса за вычетом интервала $Q \in [0;\ 1 - P + s)$, причем этот фрагмент будет смещен влево на расстояние $(1 - P + s)$. Уравнение функции спроса на вторичном рынке будет иметь вид: $\dfrac{P}{x-s} + \dfrac{Q_2}{x-s} = 1$. $Q_2 = x - s - P$. На этот рынок будет выброшено число книг с первичного рынка, равное: $1 - x + s$. Очевидно, предложение этих книг будет абсолютно неэластичным, потому что читателям, однажды купившим книгу, уже нет смысла оставлять ее себе. Эти читатели согласны будут избавиться от книги, получив за нее любую цену (по крайней мере, так следует из условия задачи). Равновесная цена на вторичном рынке и есть та субсидия s, на которую рассчитывают покупатели первичного рынка. Таким образом, из условия $Q_2 = Q_s$ следует:

$$x - s - P = 1 - x + s; \quad x - s - s = 1 - x + s; \quad s = \frac{2x-1}{3}.$$

Первичный рынок



Вторичный рынок



Выручка Учпедгиза на первичном рынке: $x(1 - x + s) = x\left(1 - x + \dfrac{2x-1}{3}\right) = \dfrac{2x}{3} - \dfrac{x^2}{3}$.

Максимум выручки достигается при условии: $\dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3}x = 0$. $x = 1$. Максимальная выручка: $\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$. Рост выручки : $\dfrac{1}{3} : 0{,}25 = 1\dfrac{1}{3}$.

Ответ. Выручка вырастет в $1\frac{1}{3}$ раза.

Примечание. В этом решении неявно предполагалось, что книга на вторичном рынке будет иметь такой же первоначальный товарный вид, как и на первичном. Если вас такое предположение не устраивает, ответ можно немного изменить: «Выручка вырастет *не более* чем в $1\frac{1}{3}$ раза».

S004. Один итальянский город разделен рекой, через которую можно переправиться только на пароме. Единственным очагом культуры в данном городе является кукольный театр Карабаса-Барабаса, расположенный на левом берегу. Кстати, на левом берегу живет ровно в два раза меньше жителей, чем на правом. Жители правого берега переправляются на левый и обратно только с одной целью – посмотреть спектакль в театре Карабаса-Барабаса. Все жители города имеют идентичные линейные функции спроса на билеты в театр. Однако следует учитывать, что жителям правого берега к цене каждого билета приходится добавлять плату за переправу на пароме.

Паромщик назначает плату за переправу, никого не спрашивая и заботясь только о максимизации своей выручки. Карабас-Барабас, учитывая плату за переправу, назначенную паромщиком, устанавливает такую цену билета (одинаковую для всех жителей города), которая максимизирует выручку театра.

Однажды Карабас-Барабас с целью увеличения выручки решил переместить театр с левого берега на правый (для простоты будем считать, что расходы на переезд театра равны нулю). Паромщик быстро сообразил, что его выручка в таком случае существенно уменьшится. Поэтому он решил отговорить Карабаса-Барабаса от его решения, пообещав навсегда уменьшить в несколько раз плату за переправу жителей на пароме. Во сколько раз паромщик должен уменьшить плату за переправу, чтобы Карабас-Барабас отказался от намерения переместить театр на правый берег?

Решение

В задаче не даны какие-либо конкретные значения или единицы измерения объемов и цен, поэтому функцию спроса жителей *левого берега* на билеты в театр можно выразить следующим образом: $Q_L = 1 - P$. На правом берегу население в два раза больше. Поэтому, если бы жителям правого берега не приходилось оплачивать паромную переправу, их функция спроса на билеты в театр имела бы вид: $Q_R = 2(1 - P) = 2 - 2P$. Однако, учитывая, что к стоимости каждого билета в театр для жителя правого берега прибавляется стоимость переправы *туда и обратно* (обозначим величину этого тарифа как t), указанная функция спроса принимает другой вид: $Q_R = 2 - 2(P + t)$.

Общая функция спроса для случая, когда театр находится на левом берегу:
$Q = Q_L + Q_R = = 1 - P + 2 - 2(P + t) = 3 - 3P - 2t$.

Выручка театра: $R = PQ = P(3 - 3P - 2t) = 3P - 3P^2 - 2tP$.

При заданной паромщиком величине t Карабас-Барабас максимизирует выручку театра при условии: $3 - 6P - 2t = 0$. $P = 0{,}5 - {}^1\!/_3\, t$. Число билетов в театр, купленное жителями правого берега (и, соответственно, число пассажиров парома):
$Q_R = 2 - 2(P + t) = 2 - 2(0{,}5 - {}^1\!/_3\, t + t) = 1 - {}^4\!/_3\, t$. Выручка паромщика: $(1 - {}^4\!/_3\, t)\, t = t - {}^4\!/_3\, t^2$. Максимум выручки достигается при условии: $1 - {}^8\!/_3\, t = 0$. $t = {}^3\!/_8$. Максимальная выручка паромщика в случае, если театр находится на левом берегу: ${}^3\!/_8 - {}^4\!/_3({}^3\!/_8)^2 = 0{,}1875$.

Предположим, Карабас-Барабас переместил театр на правый берег. Функции спроса для жителей левого и правого берега принимают вид: $Q_L = 1 - (P + t)$; $Q_R = 2 - 2P$. Общая функция спроса: $Q = Q_L + Q_R = 3 - 3P - t$. Выручка театра: $R = PQ = P(3 - 3P - t)$ $= 3P - 3P^2 - tP$.

Условие максимизации выручки театра: $3 - 6P - t = 0$. $P = 0{,}5 - {}^1\!/_6\, t$.

Число билетов в театр, купленное жителями левого берега (и, соответственно, число пассажиров парома): $Q_L = 1 - (P + t) = 1 - (0{,}5 - {}^1\!/_6\, t + t) = 0{,}5 - {}^5\!/_6\, t$. Выручка паромщика: $(0{,}5 - {}^5\!/_6\, t)\, t = 0{,}5t - {}^5\!/_6\, t^2$. Максимум выручки достигается при условии: $0{,}5 - {}^5\!/_3\, t = 0$. $t = 0{,}3$. Максимальная выручка паромщика в случае, если театр находится на правом берегу: $0{,}5 \times 0{,}3 - {}^5\!/_6 \times (0{,}3)^2 = 0{,}075$.

Максимальная выручка театра в случае, если театр находится на правом берегу:
$R = P(3 - 3P - t) = (0{,}5 - {}^1\!/_6\, t)[3 - 3(0{,}5 - {}^1\!/_6\, t) - t] = (0{,}5 - 0{,}05)(3 - 3\times 0{,}45 - 0{,}3) = 0{,}6075$.

Если паромщик хочет, чтобы театр остался на левом берегу, он должен установить такую величину тарифа t, при котором театр будет получать на левом берегу выручку не меньше 0,6075 (а лучше, если немного больше).

Т.е. $R = P(3 - 3P - 2t) = (0{,}5 - {}^1\!/_3\, t)[3 - 3\times(0{,}5 - {}^1\!/_3\, t) - 2t] = {}^1\!/_3\, t^2 - t + 0{,}75 > 0{,}6075$. ${}^1\!/_3\, t^2 - t + 0{,}1425 \geq 0$. Неравенство выполняется при $t < 0{,}15$ и $t > 2{,}85$. Очевидно, по смыслу задачи следует принять значение $t < 0{,}15$.

Определим, во сколько раз паромщик должен снизить плату за переправу: $({}^3\!/_8) : 0{,}15 = 2{,}5$. Таким образом, тариф следует снизить более чем в 2,5 раза.

Осталось выяснить один вопрос: будет ли паромщик после снижения тарифа получать доход *не меньший*, чем в случае, когда театр все же перемещается на правый берег. Итак, пусть $t = 0{,}15$ (точнее, чуть меньше 0,15). Выручка паромщика в случае, если театр все же остался на левом берегу: $t - {}^4\!/_3\, t^2 = 0{,}12$ (точнее, чуть меньше 0,12) $> 0{,}075$. Таким образом, паромщику выгодно снизить тариф для того, чтобы отговорить Карабаса-Барабаса от перемещения театра.

Ответ. Более чем в 2,5 раза.

S005. На внутреннем рынке одной страны функции спроса и предложения на некий товар являются линейными, причем график функции предложения выходит из начала координат. Если на этот рынок не поступает импортный товар, то равновесная цена равна 18. Мировая цена на этот товар равна 9. Если государство разрешит импорт и установит потоварную пошлину для импортеров в размере t $(0 \leq t \leq 9)$, то выручка внутренних производителей (R_D) и выручка импортеров за вычетом пошлины (R_W) окажутся связанными следующим соотношением: $R_D = \dfrac{R_W^2}{432} - R_W + 108$.

Сформулируйте функции спроса и предложения на внутреннем рынке страны.

Решение

Пусть функции спроса и предложения на внутреннем рынке страны имеют следующий вид: $Q_d = a - bP$; $Q_s = cP$. Очевидно, при $t = 9$ импорт равен нулю и равновесная цена равна 18. Поскольку при этих условиях весь товар предлагается внутренними производителями, можно записать: $R_D = 108 = P\times Q = 18Q$. $Q = 6$. Таким образом, график функции предложения проходит через две точки: (0; 0) и (6; 18). $Q_s = {}^P\!/_3$.

Условие равновесия при отсутствии импорта: $a - bP = cP$. $a - b\times 18 = {}^{18}\!/_3$.

$a = 6 + 18b$.

Если $t = 0$, то цена, по которой товар продается на внутреннем рынке, равна 9. Объем спроса при этой цене: $Q = a - b\times 9 = 6 + 18b - 9b = 6 + 9b$. Общая выручка всех продавцов: $PQ = 9\times(6 + 9b)$.

Выручка внутренних производителей: $PQ_s = R_D = \dfrac{9\times 9}{3} = 27$.

Выручка импортеров: $R_W = PQ - PQ_s = 9\times(6 + 9b) - 27 = 27 + 81b$.

Подставим эти выражения для выручки в соотношение, приведенное в условии задачи:

$27 = \dfrac{(27+81b)^2}{432} - (27 + 81b) + 108$. $3b^2 - 14b + 11 = 0$. $b_1 = \dfrac{11}{3}$, $b_2 = 1$.

$a_1 = 6 + 18b_1 = 72$. $a_2 = 6 + 18b_2 = 24$.

Ответ. Уравнение функции спроса: $Q_d = 72 - \dfrac{11P}{3}$ или $Q_d = 24 - P$. Уравнение функции предложения: $Q_s = {}^P\!/_3$.

S006. На каждый Новый год, а именно, 1 января в 0 часов 0 минут мачеха дарит Золушке три мороженки и некоторое количество медных монеток. Как минимум, одну мороженку Золушка должна съесть тотчас. Не съеденные тотчас мороженки она может положить на хранение в холодильник. Каждая из них может быть съедена в 0 часов 0 минут любых суток текущего года. За одни сутки хранения одной мороженки в холодильнике Золушка должна платить мачехе одну монетку (а если одновременно хранятся две мороженки, надо платить 2 монетки в сутки). Количество монеток, полученное Золушкой, достаточно для оплаты хранения двух мороженок в течение года и даже немного более. Мороженка может храниться в холодильнике только целое число суток. После извлечения мороженки из холодильника Золушка обязана немедленно съесть ее. Будем считать, что в году ровно 365 суток.

Функция полезности Золушки: $U = X - 0{,}01Y^2$, где X – сумма денег, которая осталась у Золушки к концу года после оплаты хранения мороженок, Y – максимальный интервал времени (в сутках) в течение года между моментами употребления мороженок.

Сколько суток Золушка будет хранить в холодильнике вторую мороженку и сколько суток – третью?

Решение

Предположим, сумма денег, полученная Золушкой, равна M. Очевидно, возможны три сценария поведения Золушки: 1) Все три мороженки съедаются 1 января; 2) 1 января съедаются две мороженки, а 3-я мороженка – в течение года; 3) 2-я и 3-я мороженки съедаются в течение года. Рассмотрим по очереди эти сценарии.

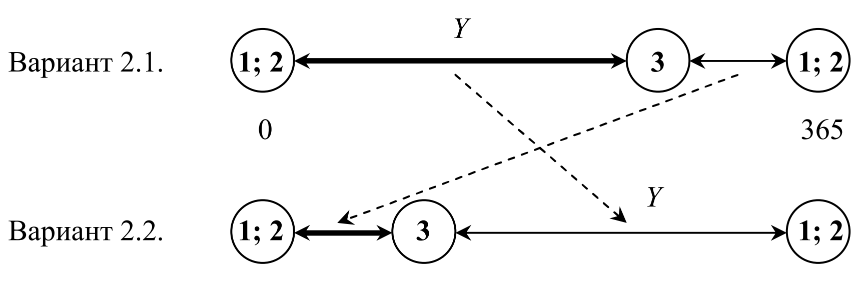
Сценарий 1. Все три мороженки съедаются 1 января

После того как съедены все мороженки, Золушки ждет 365 суток до следующего Нового года. $U = M - 0{,}01 \times 365^2 = M - 1332{,}25$.

Сценарий 2. 1 января съедаются две мороженки, а 3-я мороженка – в течение года

Этот сценарий иллюстрирует приведенная ниже схема. Первый кружок на оси времени показывает момент 0 (0 часов 0 минут 1 января), последний кружок – окончание 365-х суток (или 0 часов 0 минут 1 января следующего года, когда Золушка вновь получает три мороженки). Цифры в кружках – это номера съедаемых мороженок. Жирная стрелка обозначает интервал времени, в течение которого Золушка оплачивает хранение одной мороженки.

Предположим, первоначально Золушка по какой-то причине выбрала Вариант 2.1., при котором самый длинный интервал (между 2-й и 3-й мороженками) находится в начале года. Очевидно, более предпочтительным является Вариант 2.2. При выборе этого варианта величина $0{,}01Y^2$ остается той же самой, а величина X оказывается большей (так как расходы на хранение уменьшаются).



Это значит, что при выборе Сценария 2 самый длинный интервал будет находиться в конце года. Т. е. $182 < Y < 365$ (не забывайте, что по смыслу задачи Y – целое).

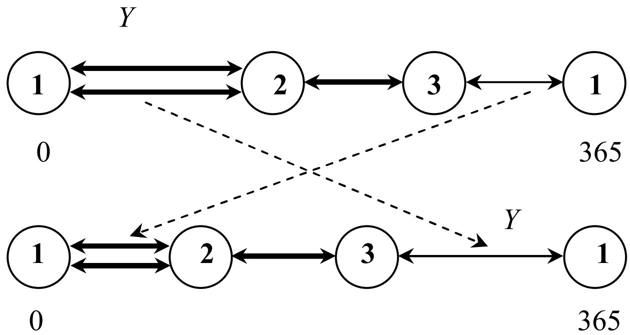
$U = [M - (365 - Y)] - 0{,}01Y^2 = -0{,}01Y^2 + Y + (M - 365)$. $U' = 1 - 0{,}02Y = 0$. Абсолютный максимум функции полезности достигается при $Y = 50$. А на интервале возможных значений $(182 < Y < 365)$ максимальная полезность обеспечивается при $Y = 183$. $U = [M - (365 - 183)] - 0{,}01 \times 183^2 = M - 516{,}89$.

Сценарий 3. 2-я и 3-я мороженки съедаются в течение года

Приведенная ниже схема аналогична предыдущей. Двойная жирная стрелка означает интервал времени, в течение которого оплачивается хранение двух мороженок. Предположим опять-таки, что Золушка выбрала самый длинный интервал в начале года (Вариант 3.1.1.). По причинам, рассмотренным выше, Вариант 3.1.2. будет более предпочтительным.

Вариант 3.1.1.

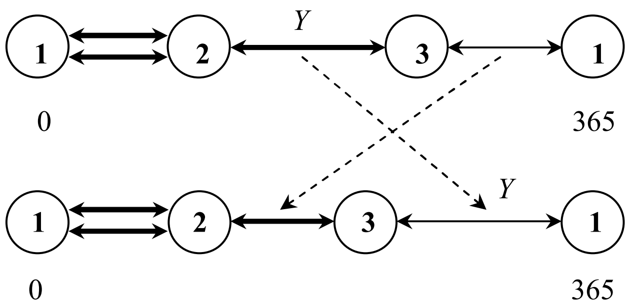
Вариант 3.1.2.



Точно так же Вариант 3.2.2 более выгоден для Золушки, нежели Вариант 3.2.1.

Вариант 3.2.1.

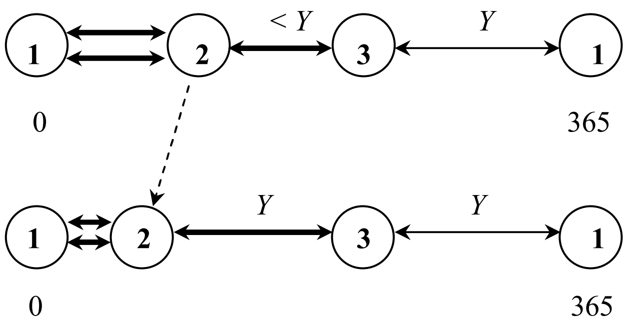
Вариант 3.2.2.



Таким образом, при выборе Сценария 3 самый длинный интервал также находится в конце года. Это будет интервал между 3-й мороженкой текущего года и 1-й мороженкой следующего года. Осталось определить, каким будет интервал между 2-й и 3-й мороженками текущего года. Предположим, этот интервал меньше Y (Вариант 3.3.1.). Очевидно, увеличив его до размера Y, мы можем сократить общие расходы на хранение мороженок в холодильнике. Но больше, чем Y, этот интервал быть не может. Если он станет большим, чем Y, мы возвращаемся к Варианту 3.2.1., когда самый большой интервал был между 2-й и 3-й мороженками. А этот вариант, как мы выяснили, не является оптимальным.

Вариант 3.3.1.

Вариант 3.3.2.



Следовательно, при выборе Сценария 3 наилучшим является Вариант 3.3.2.
$U = [M - (365 - 2Y) - (365 - Y)] - 0{,}01Y^2 = M - 730 + 3Y - 0{,}01Y^2$. $U' = 3 - 0{,}02Y = 0$.
$Y = 150$. $U = M - 730 + 3Y - 0{,}01Y^2 = M - 505$.

Сравнивая сценарии, мы обнаруживаем, что максимум функции полезности достигается при выборе Сценария 3. Т. е. 2-я мороженка хранится $365 - 2 \times 150 = 65$ суток. Третья мороженка хранится $365 - 150 = 215$ суток.

Ответ. Вторая мороженка хранится 65 суток, третья – 215 суток.

S007. Веймарская республика. Гиперинфляция. Отставной фельдфебель Ганс ранним утром приехал в пивную на своей инвалидной коляске, имея при себе 5032 миллиарда марок. В тот момент, когда он приехал, кружка баварского пива стоила 100 миллиардов марок, а сосиска с кислой капустой – 60 миллиардов марок. Гансу было известно, что через каждый час сосиска будет дорожать на 2 миллиарда марок. Кроме того, он знал, на какую величину будет возрастать каждый час цена кружки пива, но, к сожалению, нам эта величина неизвестна. В связи с дефицитом продуктов посетитель может заказать не более одной кружки пива в час. То же относится к сосискам с кислой капустой. Правда, сидеть в пивной можно неограниченно долго, поскольку она работает круглосуточно.

Функция полезности Ганса имеет вид: $U = XY$, где X – число выпитых кружек пива, Y – число съеденных сосисок. Фельдфебель Ганс сидел в пивной до тех пор, пока не потратил все свои деньги. Известно, что, максимизируя свою функцию полезности, Ганс выпил 20 кружек пива. Если так, то сколько он съел сосисок с кислой капустой?

Решение

Предельная полезность X-й кружки пива: $MU_X = \dfrac{\partial U}{\partial X} = Y$. То же для Y-й сосиски: $MU_Y = \dfrac{\partial U}{\partial Y} = X$. Поскольку цены благ возрастают так, что цена $(i + 1)$-й единицы блага всегда больше цены i-й единицы, можно принять следующий критерий оптимума:
$\dfrac{MU_X}{P_X} = \dfrac{MU_Y}{P_Y}$, где P_X, P_Y – цены последних приобретенных единиц того и другого блага.

Цена X-й кружки пива: $P_X = 100 + \varphi(X - 1)$, где φ – величина, на которую каждый час дорожает кружка пива. Цена Y-й сосиски: $P_Y = 60 + 2(Y - 1)$.

Условие оптимума: $\dfrac{Y}{100 + \varphi(X-1)} = \dfrac{X}{60 + 2(Y-1)}$. $Y[60 + 2(Y - 1)] = X[100 + \varphi(X - 1)]$.

По формуле суммы членов арифметической прогрессии можно составить следующее бюджетное ограничение: $5032 = \dfrac{100 + 100 + \varphi(X-1)}{2}X + \dfrac{60 + 60 + 2(Y-1)}{2}Y$.

$$5032 = \frac{100X + X[100 + \varphi(X-1)]}{2} + \frac{60 + 60 + 2(Y-1)}{2}Y.$$

Используя условие оптимума, заменяем в этом выражении $X[100 + \varphi(X - 1)]$ на $Y[60 + 2(Y - 1)]$.

$$5032 = \frac{100X + Y[60 + 2(Y-1)]}{2} + \frac{60 + 60 + 2(Y-1)}{2}Y.$$

Учитывая, что при оптимуме $X = 20$, получаем следующее уравнение:
$Y^2 + 44Y - 2016 = 0$. $Y = 28$.

Ответ: 28 сосисок с кислой капустой.

S008. Жители одной китайской провинции очень любят фейерверки, поэтому устраивают их по любому поводу. Для устройства фейерверка необходим хотя бы один комплект ракет (который, естественно, используется только один раз), а также специальная ракетная установка. Будем считать, что ракетная установка служит один год. Руководство провинции решило ввести потоварные налоги: t_1 для производителей ракетных установок и t_2 для производителей ракет.

Функции спроса и предложения на рынке ракетных установок (в расчете на год) до введения налогов имеют вид: $Q_d = 44 – P$, $Q_s = P$.

Функции спроса и предложения на рынке комплектов ракет (в расчете на год) до введения налогов: $q_d = 10Q – 8p$, где Q – объем продаж на рынке ракетных установок (вполне естественно, что объем спроса на ракеты зависит от объема спроса на ракетные установки); $q_s = 2p$.

При каких значениях t_1 и t_2 будет получена максимальная сумма налоговых поступлений на двух рынках, вместе взятых?

Решение

Условие равновесия на рынке ракетных установок после введения налога:
$44 – P = P – t_1$. $P = 22 + 0{,}5t_1$. $Q = 44 – P = 44 – 22 – 0{,}5t_1 = 22 – 0{,}5t_1$.

Общая сумма налоговых поступлений на рынке ракетных установок:
$T_1 = Q\,t_1 = 22t_1 – 0{,}5t_1^2$.

Функция спроса на рынке ракет (с учетом того, что равновесный объем на рынке ракетных установок после введения налога равен: $Q = 22 – 0{,}5t_1$):
$q_d = 10Q – 8p = 10(22 – 0{,}5t_1) – 8p = 220 – 5t_1 – 8p$.

Условие равновесия на рынке ракет после введения налога на производителей ракет:
$220 – 5t_1 – 8p = 2(p – t_2)$. $p = 22 – 0{,}5t_1 + 0{,}2t_2$.
$q = 220 – 5t_1 – 8(22 – 0{,}5t_1 + 0{,}2t_2) = 44 – t_1 – 1{,}6\,t_2$.

Общая сумма налоговых поступлений на рынке ракет: $T_2 = q\,t_2 = 44\,t_2 – t_1 t_2 – 1{,}6\,t_2^2$.

Общая сумма налоговых поступлений на двух рынках, вместе взятых: $T = T_1 + T_2 =$
$= 22t_1 – 0{,}5t_1^2 + 44t_2 – t_1 t_2 – 1{,}6\,t_2^2$. Максимум T достигается при условии:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t_1} = 22 - t_1 - t_2 = 0 & \Rightarrow \quad t_1 = 22 - t_2 \\ \dfrac{\partial T}{\partial t_2} = 44 - t_1 - 3{,}2\,t_2 = 0 & \Rightarrow \quad 44 - (22 - t_2) - 3{,}2\,t_2 = 0 \end{cases}$$

$22 – 2{,}2t_2 = 0$. $t_2 = 10$. $t_1 = 22 – t_2 = 12$.

Ответ. $t_1 = 12$, $t_2 = 10$.

S009. На рынке присутствуют два покупателя, имеющие функции спроса: $Q_{d1} = a_1 – P$ и $Q_{d2} = a_2 – P$ ($a_2 > a_1$). Если продавец установит разные цены на товар для того и другого покупателя, то максимальная выручка, которую он сможет получить на данном рынке, будет равна 164. Если он установит одинаковую цену для того и другого, то его максимальная выручка будет равна 162. Определите a_1 и a_2.

Решение

Ситуация I. Продавец устанавливает разные цены. Выручка от первого покупателя:
$R_1 = P_1 Q_1 = (a_1 – Q_1)Q_1 = a_1 Q_1 – Q_1^2$. $R_1' = a_1 – 2Q_1 = 0$. $Q_1 = 0{,}5a_1$.
$R_1 = 0{,}5a_1^2 – 0{,}25a_1^2 = 0{,}25a_1^2$. Аналогично $R_2 = 0{,}25a_2^2$.
По условию $R_1 + R_2 = 0{,}25a_1^2 + 0{,}25a_2^2 = 164$.

Отсюда $a_1^2 + a_2^2 = 656$ **(1)**.

Ситуация 2. Цена одна и та же (P). Выручка от первого покупателя:
$R_1 = P\,Q_1 = P\,(a_1 – P)$. Выручка от второго покупателя: $R_2 = P\,Q_2 = P\,(a_2 – P)$.
Общая выручка $R = P\,(a_1 – P) + P\,(a_2 – P) = a_1 P + a_2 P – 2P^2 = P\,(a_1 + a_2 – 2P)$ **(2)**.

Обратите внимание! Мы знаем, что во второй ситуации максимальная выручка равна 162. Но это число еще нельзя подставлять в уравнение **(2)**. Максимальное значение выручки мы можем использовать только тогда, когда получим выражение, связывающие оптимальные значения переменных. В данном случае это такое значение P, при котором достигается R_{max}.

А R_{max} достигается при условии: $R' = a_1 + a_2 - 4P = 0$. $P = 0{,}25(a_1 + a_2)$.

$R = P(a_1 + a_2 - 2P) = 0{,}25(a_1 + a_2)(a_1 + a_2 - 0{,}5a_1 - 0{,}5a_2) = 0{,}125(a_1 + a_2)^2$.

А вот это выражение для выручки мы уже можем приравнять к заданному максимуму (162), поскольку оно уже содержит оптимальное значение P (при котором данный максимум и достигается).

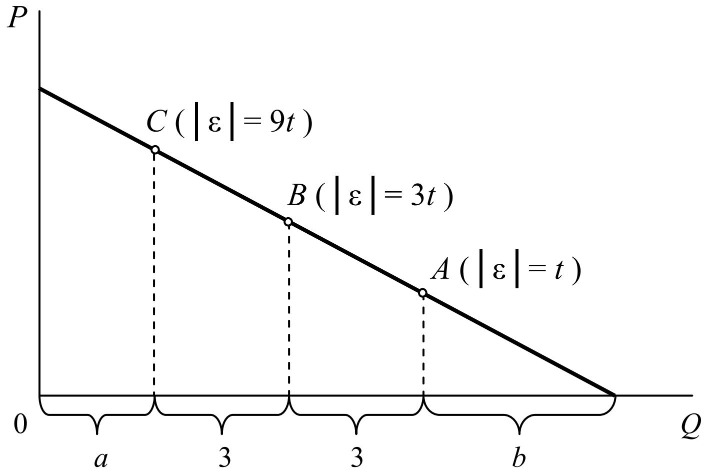
$0{,}125(a_1 + a_2)^2 = 162$. $(a_1 + a_2)^2 = 1296$. $a_1 + a_2 = 36$. $a_2 = 36 - a_1$. Подставим это значение в уравнение **(1)**: $a_1^2 + (36 - a_1)^2 = 656$. $a_1^2 - 36a_1 + 320 = 0$. Получаем два значения a_1: 20 и 16. Соответствующие значения a_2: 16 и 20. По условию $a_2 > a_1$. Поэтому $a_1 = 16$, $a_2 = 20$.

Ответ. $a_1 = 16$, $a_2 = 20$.

S010. Во время проведения маркетингового исследования на рынке товара X эксперт Y обнаружил, что функция спроса на товар X является линейной. Кроме того, был обнаружен еще один факт: если взять за точку отсчета одно определенное значение объема спроса, то при уменьшении этого объема на 3 единицы эластичность спроса по абсолютной величине ($|\varepsilon|$) возрастает в три раза. А если уменьшить объем спроса *еще* на три единицы, то эластичность спроса по абсолютной величине вырастет *еще* в три раза. Помогите эксперту определить, какой максимальный объем товара может быть продан на данном рынке.

Решение

Обозначим значения эластичности по абсолютной величине для трех упомянутых в условии значений объема спроса как t, $3t$, $9t$.



Пользуясь геометрическим методом определения эластичности, мы можем записать следующие равенства:

$$\begin{cases} b : (a + 3 + 3) = t & \textbf{(1)} \\ (3 + b) : (a + 3) = 3t & \textbf{(2)} \\ (3 + 3 + b) : a = 9t & \textbf{(3)} \end{cases}$$

Разделив **(2)** на **(1)**, получим: $[(b + 3)(a + 6)] : [(a + 3)b] = 3$.

$ab + 6b + 3a + 18 = 3ab + 9b$. $3a - 3b - 2ab + 18 = 0$ **(4)**.

Разделив **(3)** на **(1)**, получим: $[(a + 6)(b + 6)] : (ab) = 9$.

$ab + 6a + 6b + 36 = 9ab$. $6a + 6b + 36 - 8ab = 0$. $3a + 3b - 4ab + 18 = 0$ **(5)**.

Вычитая **(4)** из **(5)**, получаем: $6b - 2ab = 0$. $a = 3$. Подставив это значение a в **(4)** или **(5)**, найдем, что $b = 3$.

Максимальный объем товара будет равен: $a + 3 + 3 + b = 12$.

Ответ: 12.

S011. Функция спроса для одного монополиста является линейной, предельные издержки постоянны и равны средним общим издержкам. Монополист знает, что при установленной им нынешней цене ($P = 40$) он не максимизирует прибыль. Однажды он спросил своего менеджера, как изменится прибыль, если повысить цену на 35% по сравнению с нынешней ценой. Прибыль увеличится тоже на 35%, ответил менеджер. А если мы повысим цену на 45% по сравнению с нынешней? Тогда прибыль, наоборот, *упадет* на 45% по сравнению с нынешней прибылью, ответил менеджер.

«Это какая-то мистика» – пробормотал монополист и пошел в библиотеку за учебником по микроэкономике.

Пожалуйста, определите предельные издержки монополиста.

Решение

В задаче ничего не сказано о единицах измерения объема, поэтому мы можем выбрать такие единицы для Q, при которых функция спроса имеет вид: $Q = a - P$. Будем считать, что $MC = ATC = c$.

Нынешнее значение прибыли: $\pi = (a - 40)(40 - c)$ **(1)**.

Если цена будет равна $1{,}35P = 54$, $\pi_1 = (a - 54)(54 - c) = 1{,}35(a - 40)(40 - c)$ **(2)**.

Если цена будет равна $1{,}45P = 58$, $\pi_2 = (a - 58)(58 - c) = (1 - 0{,}45)(a - 40)(40 - c)$ **(3)**.

Уравнения **(2)** и **(3)** образуют следующую систему:

$$\begin{cases} 54a - ac - 2916 + 54c = 54a - 1{,}35ac - 2160 + 54c \\ 58a - ac - 3364 + 58c = 22a - 0{,}55ac - 880 + 22c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}35ac - 756 = 0 & \textbf{(4)} \\ 36a - 0{,}45ac - 2484 + 36c = 0 & \textbf{(5)} \end{cases}$$

Умножим левую и правую части уравнения **(4)** на $\frac{9}{7}$, а затем сложим уравнения **(4)** и **(5)**. После этого получим: $36a - 3456 + 36c = 0$. $a = 96 - c$. Подставим это выражение для a в уравнение **(4)**: $0{,}35(96 - c)\,c - 756 = 0$. $-0{,}35c^2 + 33{,}6c - 756 = 0$. Получаем два корня: $c_1 = 36$; $c_2 = 60$ (этот корень не подходит, так как средние издержки не могут быть выше нынешней цены).

Ответ. $MC = 36$.

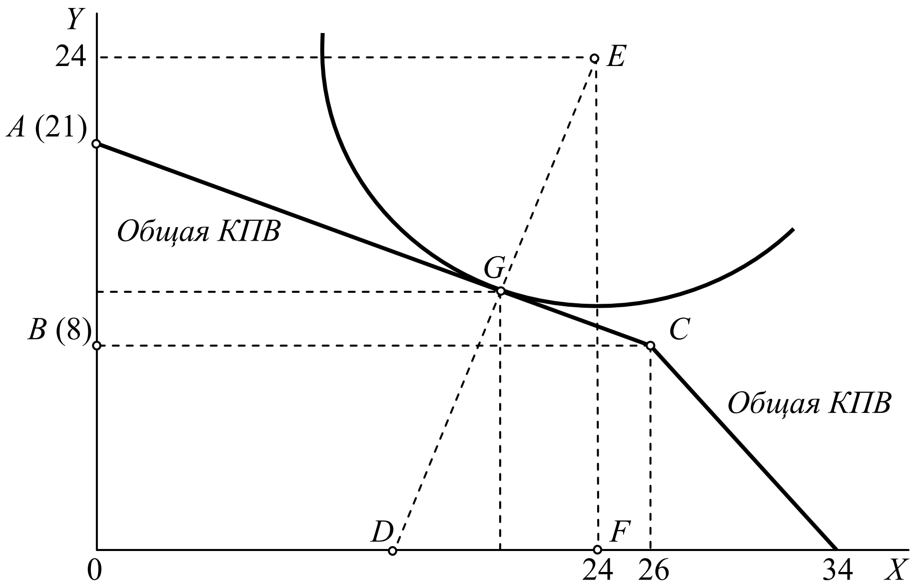
S012. Однажды Бивис и Баттхед пошли в лес собирать грибы и ягоды. КПВ Бивиса: $Y_1 = 13 - 0{,}5X_1$; КПВ Баттхеда: $Y_2 = 8 - X_2$ (где X_1, X_2 – число собранных да день ягод, Y_1, Y_2 – число собранных за день грибов). Общая карта кривых безразличия Бивиса и Баттхеда представляет собой множество концентрических окружностей с центром в точке (24; 24). Сколько грибов и ягод соберут Бивис и Баттхед, максимизируя свою общую функцию полезности?

Решение

Поскольку радиус в точке касания общей КПВ и кривой безразличия перпендикулярен касательной, AC и GE перпендикулярны. Отсюда следует, что $\angle ACB = \angle DEF$. Также можно заключить, что прямоугольные треугольники ABC и DEF подобны. Из подобия этих треугольников следует, что $\frac{DF}{EF} = \frac{AB}{BC}$. $\frac{DF}{24} = \frac{21-8}{26}$. $DF = 12$.

Используя координаты точек D (12; 0) и E (24; 24), найдем уравнение прямой DE:

$$\frac{Y-0}{24-0} = \frac{X-12}{24-12}; \qquad Y - 2X + 24 = 0 \qquad \textbf{(1)}$$



Используя координаты точек $A\,(0;\ 21)$ и $C\,(26;\ 8)$, найдем уравнение прямой AC:

$\dfrac{Y-21}{8-21}=\dfrac{X-0}{26-0}$; $Y + 0{,}5X - 21 = 0$ **(2)**

Решив систему уравнений **(1)** и **(2)**, находим: $X = 18$, $Y = 12$.

Ответ. 18 ягод и 12 грибов.

S013. В одной стране все продукты питания производятся одной государственной корпорацией. Государство приняло на себя обязательство, согласно которому цена условной потребительской корзины должна быть постоянной и равной 66 копейкам. Если один товар, входящий в корзину, дорожает, то другие должны дешеветь. Потребительская корзина включает в себя плавленый сырок, пирожок с капустой и бутылку кваса. Издержки корпорации на производство этих продуктов соответственно составляют: 25, 16 и 4 копейки. Все жители страны имеют одинаковую функцию полезности: $U = X_1X_2X_3$, где X_1, X_2, X_3 – соответственно месячное потребление сырков, пирожков и бутылок кваса. На перечисленные продукты жители тратят весь свой доход, при этом доходы всех жителей постоянны и равны между собой. Каждый житель может приобретать продукты в любой пропорции (необязательно, чтобы эта пропорция соответствовала соотношению продуктов в потребительской корзине). Корпорация удовлетворяет весь платежеспособный спрос на продукты.

Какие цены (P_1, P_2, P_3) установит корпорация на перечисленные продукты для того, чтобы получать максимальную прибыль?

Решение

Поскольку функция полезности потребителя является функцией Кобба-Дугласа, то он максимизирует общую полезность при условии: $P_1X_1 = P_2X_2 = P_3X_3$.

$X_2 = \dfrac{P_1}{P_2}X_1$. $X_3 = \dfrac{P_1}{P_3}X_1$. Прибыль корпорации $\pi = R - TC$. Очевидно, выручка корпорации равна доходу потребителей, который они тратят на приобретение продуктов: $R = I$. При этом I – постоянная величина, которая не зависит от цен и объемов приобретаемых продуктов.

$$I = P_1 X_1 + P_2 X_2 + P_3 X_3 = 3P_1 X_1. \quad X_1 = \frac{I}{3P_1}.$$

$$\pi = I - TC = I - (25X_1 + 16X_2 + 4X_3) = I - 25X_1 - 16\frac{P_1}{P_2}X_1 - 4\frac{P_1}{P_3}X_1 =$$

$$= I - 25\frac{I}{3P_1} - 16\frac{P_1}{P_2}\cdot\frac{I}{3P_1} - 4\frac{P_1}{P_3}\cdot\frac{I}{3P_1} = I\left(1 - \frac{25}{3P_1} - \frac{16}{3P_2} - \frac{4}{3P_3}\right) =$$

$$= I\left[1 - \frac{25}{3(66 - P_2 - P_3)} - \frac{16}{3P_2} - \frac{4}{3P_3}\right].$$

Максимум прибыли достигается при условии:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\pi}{\partial P_2} = \dfrac{I}{3}\left[-\dfrac{25}{(66 - P_2 - P_3)^2} + \dfrac{16}{P_2^2}\right] = 0 \\ \dfrac{\partial\pi}{\partial P_3} = \dfrac{I}{3}\left[-\dfrac{25}{(66 - P_2 - P_3)^2} + \dfrac{4}{P_3^2}\right] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{-25P_2^2 + 16(66 - P_2 - P_3)^2}{(66 - P_2 - P_3)^2 P_2^2} = 0 \\ \dfrac{-25P_3^2 + 4(66 - P_2 - P_3)^2}{(66 - P_2 - P_3)^2 P_3^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -25P_2^2 + 16(66 - P_2 - P_3)^2 = 0 \\ -100P_3^2 + 16(66 - P_2 - P_3)^2 = 0 \end{cases}$$

$25P_2^2 = 100P_3^2$. $\quad P_2 = 2P_3$. $\quad -100P_3^2 + 16(66 - 2P_3 - P_3)^2 = 0$. $\quad 10P_3 = 4(66 - 3P_3)$.
$P_3 = 12$. $\quad P_2 = 2P_3 = 24$. $\quad P_1 = 66 - P_2 - P_3 = 30$.

Ответ. $P_1 = 30$, $P_2 = 24$, $P_3 = 12$.

S014. Две фирмы, первыми подготовившие производство квантовых микропроцессоров, заключили негласное соглашение о разделе рынка. По этому соглашению некая фиксированная доля общего объема продаж будет приходиться на первую фирму, а оставшаяся доля – на вторую. Кроме того, цена товара будет установлена таким образом, чтобы обе фирмы, вместе взятые, получили на данном рынке максимальную выручку. Когда первая фирма ввела в строй производственные мощности, необходимые для выпуска товара в объеме установленной для нее квоты, один из специалистов фирмы из праздного интереса подсчитал, что в случае если вторая фирма куда-нибудь исчезнет, квота первой фирмы может быть продана на рынке по такой цене, при которой выручка этой первой фирмы составит 96% от того максимального объема выручки, который предполагают получать обе фирмы, вместе взятые. Известно, что функция спроса на данном рынке линейна.

Определите доли первой и второй фирмы, установленные негласным соглашением.

Решение

Линейная функция спроса имеет вид: $Q = a - bP$. Для того чтобы упростить вычисления, выберем такие единицы измерения Q и P, при которых функция спроса выглядит следующим образом: $Q = 1 - P$. Выручка $R = PQ = (1 - Q)Q = Q - Q^2$. Максимум выручки достигается при условии: $R' = 1 - 2Q = 0$. Общий объем выпуска, при котором достигается максимальная выручка: $Q = 0{,}5$. $R_{max} = 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25$.

Предположим, доля первой фирмы по условиям соглашения равна x $(0 < x < 1)$. Тогда количественная квота первой фирмы составит: $Q_1 = Q \cdot x = 0{,}5x$. Эта квота может быть продана по цене: $P_1 = 1 - Q_1 = 1 - 0{,}5x$. Выручка фирмы при этом составит:
$R_1 = P_1Q_1 = (1 - 0{,}5x)\,0{,}5x = 0{,}5x - 0{,}25x^2$.

По условию $R_1 = 0{,}96\,R_{max}$. $0{,}5x - 0{,}25x^2 = 0{,}96 \cdot 0{,}25$. $x^2 - 2x + 0{,}96 = 0$.
$x_1 = 1{,}2$ (этот корень не подходит по условию задачи), $x_2 = 0{,}8$.

Ответ. Доля первой фирмы – 80%, второй – 20%.

S015. Сообщество гуманоидов имеет функцию полезности $U = X_1X_2^2$, где
X_1 – физическое производство предметов потребления в *любом текущем* году,
X_2 – производство предметов потребления в следующем за ним году.

Кривая производственных возможностей сообщества имеет вид: $X_2 + Y_2 = 2{,}6Y_1$ (здесь Y_1 и Y_2 – соответственно физические объемы производства средств производства в текущем и следующем году). Ежегодно поддерживается одно и то же соотношение физических объемов производства предметов потребления и средств производства. Все предметы потребления используются в течение того текущего года, в котором они производятся. Все средства производства, производимые в текущем году, накапливаются. Они полностью используются только в течение следующего года. Определите темп ежегодного экономического роста (в процентах), который будет поддерживаться в данном сообществе.

Решение

Пусть $X_1 + Y_1 = 1$. По условию задачи $\dfrac{X_1}{Y_1} = \dfrac{X_2}{Y_2}$. $\dfrac{X_1}{1 - X_1} = \dfrac{X_2}{2{,}6Y_1 - X_2}$.

$\dfrac{X_1}{1 - X_1} = \dfrac{X_2}{2{,}6(1 - X_1) - X_2}$. $X_2 = 2{,}6X_1\,(1 - X_1)$.

$U = X_1X_2^2 = X_1 \times [2{,}6X_1\,(1 - X_1)]^2 = 2{,}6^2\,X_1^3(1 - X_1)^2$.

$U' = 3 \times 2{,}6^2\,X_1^2(1 - X_1)^2 - 2 \times 2{,}6^2\,X_1^3(1 - X_1) = 0$. $X_1 = 0{,}6$. $X_2 = 2{,}6X_1\,(1 - X_1) = 0{,}624$.

$\dfrac{X_2}{X_1} = 1{,}04$. Таким образом, производство предметов потребления вырастет на 4%.
Нетрудно убедиться, что таким же будет и рост производства средств производства.

Ответ: 4%.

S016. Долгое время фирма X являлась единственным производителем уникального аппарата – генератора закадрового смеха для комедийных сериалов. Фирма X была легальным монополистом, так как имела патент на данный аппарат. Функция спроса на рынке этих аппаратов в расчете на год имеет вид: $Q_d = 600 - P$. Предельные издержки фирмы X (равные средним издержкам) составляют 100 денежных единиц.

Однако через некоторое время на рынке появилась китайская фирма Y, заявившая о возможности производства такого же аппарата и предложившая фирме X предоставить ей (фирме Y) право производства данного аппарата на условиях выплаты патентообладателю (фирме X) специального вознаграждения – роялти – за каждую выпущенную единицу продукции. Предельные издержки фирмы Y (так же равные средним издержкам) составляют 40 денежных единиц.

Предполагается, что обе фирмы знают об издержках друг друга, но это знание нельзя использовать как аргумент в переговорном процессе, поскольку информация об издержках получена, мягко говоря, неофициальным путем. Кроме того, обеим фирмам известна функция спроса.

После длительных переговоров между фирмами была выработана следующая формула соглашения: сначала фирма X устанавливает величину роялти (r), затем фирма Y определяет свой объем выпуска Q_Y, с которым должна согласиться фирма X, а после этого фирма X определяет свой объем выпуска Q_X, с которым должна согласиться фирма Y. Если фирму Y не устроит величина роялти, она может выбрать нулевой выпуск. Соглашение является бессрочным, поэтому будем предполагать, что обе фирмы максимизируют свою ежегодную прибыль.

Какой размер роялти (r) установит фирма X и на сколько процентов вырастет ее ежегодная прибыль после заключения соглашения?

Решение

Для начала определим годовую прибыль фирмы X в тот период, когда она была единственным производителем генераторов смеха. $\pi = P \times Q - 100Q = (600 - Q)Q - 100Q =$
$= -Q^2 + 500Q$. $2Q = 500$. $Q = 250$. $\pi_{max} = -250^2 + 500 \times 250 = 62500$.

Логика рассуждений руководства фирмы X в процессе выработки соглашения будет следующей. Предположим, фирма X установила роялти в размере r. Узнав величину r, фирма Y пытается определить Q_Y. Для этого она, в свою очередь, моделирует поведение фирмы X. При неких *уже установленных* значениях r и Q_Y мы получаем следующие значения переменных величин:

остаточный спрос для фирмы X: $Q_X = 600 - P - Q_Y$;

рыночная цена: $P = 600 - Q_X - Q_Y$;

прибыль фирмы X с учетом роялти: $\pi_X = P \times Q_X - 100Q_X + r \times Q_Y =$
$= (600 - Q_X - Q_Y) \times Q_X - 100Q_X + r \times Q_Y = 500Q_X - Q_X^2 - Q_X Q_Y + r \times Q_Y$ **(1)**

На этом этапе решения часто возникает вопрос: почему бы не найти максимум π_X как функции двух переменных: Q_X и r? К сожалению, это было бы ошибкой. В выражении **(1)** в качестве экзогенной (заданной извне) величины присутствует Q_Y, которая является функцией r (поскольку объем выпуска фирмы Y, очевидно, зависит от величины роялти), а вид этой функции нам пока неизвестен.

Поэтому, получив выражение для π_X, мы решаем следующую задачу: для некоторой неизвестно как выбранной фирмой X величины роялти (r) и установленной фирмой Y величины ее выпуска Q_Y определить, какой объем выпуска выберет фирма X, максимизируя свою ежегодную прибыль. Для этого возьмем производную функции π_X по переменной Q_X.

$\pi_X' = 500 - 2Q_X - Q_Y = 0$. $Q_X = 250 - 0{,}5Q_Y$. Это *уравнение реакции* объема выпуска фирмы X на объем выпуска фирмы Y. Примечательно, что эта реакция будет одной и той же независимо от величины роялти, выбранной фирмой X. Точнее, так: исходя из функций издержек и функции спроса, присутствующих в данной задаче, для любого вы-

бранного фирмой X значения r фирма Y, максимизируя прибыль, выберет такое значение Q_Y, в ответ на которое фирма X, также максимизируя прибыль, выберет
$Q_X = 250 - 0{,}5Q_Y$ **(2)**

Далее фирма Y на основе уравнения реакции фирмы X выводит собственную функцию прибыли (с учетом роялти, выплачиваемых фирме X): $\pi_Y = P\times Q_Y - 40Q_Y - r\times Q_Y =$
$= (600 - Q_X - Q_Y)\times Q_Y - 40Q_Y - r\times Q_Y = [600 - (250 - 0{,}5Q_Y) - Q_Y]\times Q_Y - 40Q_Y - r\times Q_Y =$
$= -0{,}5Q_Y^2 + 310Q_Y - r\times Q_Y.$ $\pi_Y' = -Q_Y + 310 - r = 0.$ $Q_Y = 310 - r.$ Это *уравнение реакции* объема выпуска фирмы Y на величину роялти r.

Используя уравнение **(2)**, получаем: $Q_X = 250 - 0{,}5\times(310 - r) = 95 + 0{,}5r$. Подставим теперь полученные выражения для Q_X и Q_Y в уравнение **(1)**:

$\pi_X = 500(95 + 0{,}5r) - (95 + 0{,}5r)^2 - (95 + 0{,}5r)(310 - r) + r\times(310 - r) =$
$= -0{,}75r^2 + 405r + 9025.$
Максимум π_X достигается при условии: $-1{,}5r + 405 = 0.$ $r = 270.$ Максимальное значение прибыли фирмы X: $\pi_X = -0{,}75\times 270^2 + 405\times 270 + 9025 = 63700.$

Индекс роста прибыли: $\dfrac{63700}{62500} = 1{,}0192.$

Ответ. $r = 270$, прибыль вырастет на 1,92%.

S017. Школьница Шарлотта покупает в школьной столовой только два блюда: клубничные пудинги и омлеты. Ее функция полезности имеет вид: $U = XY$, где X – число купленных в течение месяца пудингов, Y – число купленных в течение месяца омлетов. Омлеты и пудинги можно приобрести как в качестве отдельных блюд, так и в составе комплексного обеда (пудинг + омлет). В качестве отдельного блюда пудинг имеет цену $P_X = 45$ руб., омлет как отдельное блюдо продается по цене $P_Y = 10$ руб. Комплексный обед стоит 50 рублей. Месячный бюджет Шарлотты равен 3600 рублям. Какое количество пудингов и омлетов съест Шарлотта за месяц, максимизируя свою функцию полезности?

Решение

Пусть X_0 и Y_0 – это объемы пудингов и омлетов, купленных как отдельные блюда, а k – число купленных комплексных обедов. Для начала выясним, какие значения могут принимать эти переменные. Зададимся вопросом: может ли быть получено такое оптимальное решение, при котором $X_0 > 0$, $Y_0 > 0$, $k > 0$? Если получено решение, при котором X_0 и Y_0 одновременно больше нуля, то это значит, что вместо некоторого количества комплексных обедов были приобретены за более высокую цену пары пудингов и омлетов в качестве отдельных блюд. Очевидно, такое решение не может быть оптимальным. Следовательно, какая-то из этих переменных (X_0 или Y_0) должна быть равна нулю.

Если бы пудинги и омлеты имели одну и ту же цену, то при заданной функции полезности Шарлотта приобрела бы одинаковые объемы этих блюд. Но, поскольку омлет стоит намного дешевле, а показатели степени при X и Y в функции Кобба-Дугласа равны, число омлетов будет больше, чем число пудингов. Это значит, что все пудинги будут приобретены в составе комплексных обедов. То есть нулю равна величина X_0. В этом случае общее число пудингов $X = k$, общее число омлетов $Y = Y_0 + k$.

Бюджетное ограничение Шарлотты: $3600 = 10Y_0 + 50k$. Отсюда $k = 72 - 0{,}2\,Y_0$.

$U = XY = k\times(Y_0 + k) = (72 - 0{,}2\,Y_0)(Y_0 + 72 - 0{,}2\,Y_0) = -0{,}16Y_0^2 + 43{,}2Y_0 + 5184.$
U_{max} достигается при условии: $-0{,}32Y_0 + 43{,}2 = 0.$ $Y_0 = 135.$ $k = 72 - 0{,}2\times 135 = 45.$
$X = k = 45.$ $Y = Y_0 + k = 135 + 45 = 180.$

Ответ. 45 пудингов и 180 омлетов.

S018. Функции спроса и предложения являются линейными, при этом график функции предложения выходит из начала координат. При отсутствии налогов равновесный объем $Q = 32$, равновесная цена $P = 16$. Максимальная выручка, которую могут получить продавцы на данном рынке (вообще, в принципе могут получить, независимо от того, какая у них в данный момент функция предложения), равна R_0. Максимальная сумма потоварного налога, которую государство может получить на данном рынке (при данных функциях спроса и предложения), равна $0{,}8\ R_0$.

Сформулируйте уравнения функций спроса и предложения.

Решение

График функции предложения выходит из начала координат, при этом он проходит через точку (32; 16). Поэтому $Q_s = 2P$.

Пусть функция спроса имеет вид: $Q_d = a - bP$. Учитывая, что при $P = 16$ $Q = 32$, можно записать: $32 = a - b\times 16$. Отсюда $a = 32 + 16b$.

Кстати. Если вы на данном этапе решения, желая сократить число неизвестных, сразу подставите это соотношение в формулы для Q, P и t, то впоследствии вас ожидают крупные неприятности. Вы получите практически нерешаемое уравнение. Это такая ловушка, заботливо расставленная для вас автором задачи. Обойти ее почти невозможно. Зато вы получите огромное, неоценимое интеллектуальное наслаждение, выбираясь из нее.

Максимальная выручка, которая может быть получена на данном рынке:

$$R_0 = \frac{a}{2b}\times\frac{a}{2} = \frac{a^2}{4b}.$$

Как мы знаем, максимальная сумма налоговых поступлений, которая может быть получена при линейных функциях спроса и предложения, будет в любом случае одной и той же – независимо от того, для кого вводится налог – для покупателей или продавцов. Предположим, для продавцов введен потоварный налог t. Новая функция предложения: $Q_{s1} = 2(P - t)$.

Условие равновесия на рынке: $a - bP = 2(P - t)$. $P = \dfrac{a+2t}{2+b}$.

Равновесный объем: $Q = Q_{s1} = 2(P - t) = 2\left(\dfrac{a+2t}{2+b} - t\right)$.

Общая сумма налоговых поступлений: $T = Q\,t = 2\left(\dfrac{at+2t^2}{2+b} - t^2\right)$.

$T' = 2\left(\dfrac{a+4t}{2+b} - 2t\right) = 0$. $t = \dfrac{a}{2b}$. Максимум налоговых поступлений:

$$T_{max} = Q\,t = 2\frac{a}{2b}\left(\frac{a+\frac{a}{b}}{2+b} - \frac{a}{2b}\right) = \frac{a^2}{2b(2+b)}.$$ По условию задачи: $T_{max} = 0{,}8\ R_0$.

$$\frac{a^2}{2b(2+b)} = 0{,}8\frac{a^2}{4b}.\quad b = 0{,}5.\quad a = 32 + 16b = 40.$$

Ответ. $Q_d = 40 - 0{,}5P$; $Q_s = 2P$.

S019. Функция спроса на рынке банковских сейфов имеет вид: $Q_d = 2000 - 100P$. Первоначально на рынке было 100 идентичных фирм-производителей, каждая из которых имела функцию предложения $q = P$. Правительство решило ввести потоварный налог для производителей сейфов в размере t и одновременно с таким расчетом сократить число фирм-производителей (лишив часть из них под разными предлогами государственных лицензий), чтобы каждая из оставшихся фирм после вычета налогов получала ту же самую выручку, что и раньше. Какую величину потоварного налога t с учетом всех этих условий установит правительство, чтобы максимизировать общую сумму налоговых поступлений?

Решение

Первоначальная функция предложения: $Q_s = 100P$. $Q_d = Q_s$. $2000 - 100P = 100P$. Равновесная цена $P^* = 10$, равновесный объем $Q^* = 1000$. Первоначальная выручка одной фирмы: $(P^*Q^*) : 100 = 100$.

Пусть число фирм после всех мероприятий правительства равно x. Новая общая функция предложения будет иметь вид: $Q_{s1} = x(P - t)$. Пусть $Q_{s1} = Q_d = Q$.

Для того чтобы каждая фирма после вычета налогов получала прежнюю выручку, необходимо выполнение условия: $\frac{PQ}{x} - \frac{tQ}{x} = 100$. Отсюда $x = 0{,}01Q\,(P - t)$.

$Q = x(P - t) = 0{,}01Q\,(P - t)^2$. $1 = 0{,}01(P - t)^2$. $10 = \pm\,(P - t)$. Очевидно, $P > t$, поэтому $P - t = 10$. $P = 10 + t$.

Из функции спроса $Q = 2000 - 100P = 2000 - 100(10 + t) = 1000 - 100\,t$.
Общая сумма налоговых поступлений $T = t\,Q = t\,(1000 - 100\,t) = 1000\,t - 100\,t^2$.
$T\,' = 1000 - 200\,t = 0$. $t = 5$.

Ответ: $t = 5$.

S020. Граф Бартоломео имеет в личной собственности глубоководный пруд, в котором ежегодно производится сезонный лов рыбы. Для лова рыбы он нанимает рыбаков и приобретает сети. Сеть служит только в течение одного сезона. Один рыбак, используя одну сеть, может выловить в течение сезона 87 рыб. Если одну сеть держат два рыбака, то их общий улов составит: 87 + 86 рыб. Если одну сеть держат три рыбака, то их общий улов будет равен: 87 + 86 + 85 рыб. И так далее. Другими словами, предельный продукт труда каждого последующего рыбака (из числа занятых на одной и той же сети) на единицу меньше, чем предельный продукт предыдущего.

Если граф Бартоломео приобретает несколько сетей для одного сезона лова рыбы, то на каждую сеть приходится одинаковое число рыбаков. Чтобы нанять одного рыбака на весь сезон лова рыбы, надо заплатить ему 1 лиру. Одна сеть стоит 5 лир. Сумма денег, которую граф может потратить на ловлю рыбы, равна 300 лирам.

a) Для выбранной графом технологии лова рыбы сформулируйте производственную функцию в виде: $Q = f\,(K, L)$, где Q – общее число выловленных рыб, K – общее число сетей (объем капитала), L – общее число рыбаков на всех сетях, вместе взятых.

b) Какую отдачу от масштаба имеет найденная Вами производственная функция?

c) Сколько всего рыбаков наймет граф и сколько купит сетей?

d) Каким будет максимально возможный улов рыбы?

Решение

a) Предположим, каждую сеть держат s рыбаков. Тогда улов в расчете на одну сеть будет равен: $87 + 86 + 85 + \ldots + 87 - (s - 1) = \dfrac{87 + 87 - (s-1)}{2} \times s = 87{,}5s - 0{,}5s^2$.

Очевидно, $s = \dfrac{L}{K}$.

Общий улов составит: $Q = f(K, L) = K\left(87{,}5\dfrac{L}{K} - 0{,}5\dfrac{L^2}{K^2}\right) = 87{,}5L - 0{,}5\dfrac{L^2}{K}$.

b) Пусть первоначальное значение функции: $Q_0 = 87{,}5L - 0{,}5\dfrac{L^2}{K}$. Увеличив объемы K и L в n раз, мы получим новое значение функции: $Q_1 = n\times 87{,}5L - n\times 0{,}5\dfrac{L^2}{K}$.

$Q_1 = n\,Q_0$. Функция имеет постоянную отдачу от масштаба.

c) Бюджетное ограничение для графа Бартоломео имеет вид: $300 = L + 5K$.

$L = 300 - 5K$. $\quad Q = 87{,}5(300 - 5K) - 0{,}5\dfrac{(300-5K)^2}{K} =$

$$= \frac{87{,}5K(300-5K) - 0{,}5(300-5K)^2}{K} = \frac{-450K^2 + 27750K - 45000}{K}.$$

$$Q' = \frac{(-900K + 27750)K - (-450K^2 + 27750K - 45000)}{K^2} = 0.$$

$-450K^2 + 45000 = 0.$ $\quad K = 10.$ $\quad L = 300 - 5K = 250.$

d) $Q_{max} = 87{,}5\times 250 - 0{,}5\dfrac{250^2}{10} = 18750.$

Ответ. a) $Q = f(K, L) = 87{,}5L - 0{,}5\dfrac{L^2}{K}$; b) функция имеет постоянную отдачу от масштаба; c) 250 рыбаков и 10 сетей; d) 18750.

S021. Половину населения одной страны составляют холерики, другую половину – флегматики. Кривые Лаффера для той и другой группы населения представляют собой квадратичные параболы. Максимальная сумма налоговых поступлений от флегматиков равна 100 денежным единицам и достигается она при ставке подоходного налога, равной 20%. Максимум налоговых поступлений от холериков равен 180, и достигается он при ставке налога, равной 30%. При любой ставке налога и холерики, и флегматики честно платят налог со всей суммы своего дохода.

Какую единую ставку подоходного налога должно установить правительство для обеих групп населения, чтобы коэффициент Джини, рассчитанный на основе располагаемых доходов (т.е. оставшихся после уплаты налога) был равен $^1/_{14}$?

Решение

Уравнение кривой Лаффера для флегматиков имеет следующий вид: $T_1 = at^2 + bt + c$, где T_1 – общая сумма налоговых поступлений, t – ставка налога (десятичная дробь). Как известно, кривая Лаффера выходит из начала координат, т.е. при $t = 0$ $T_1 = 0$. Отсюда следует, что $c = 0$. Поскольку квадратичная парабола симметрична, при $t = 0{,}4$ $T_1 = 0$. $0 = a\times 0{,}4^2 + b\times 0{,}4$. $b = -0{,}4a$.

Наконец, из условия известно, что при $t = 0{,}2$ $T_1 = 100$.
$100 = a\times 0{,}2^2 + (-0{,}4a)\times 0{,}2$. Отсюда $a = -2500$, $b = 1000$. $T_1 = -2500\,t^2 + 1000\,t$.

T_1 – это сумма, составляющая долю t всего дохода флегматиков, который мы обозначим как I_1. Т.е. $I_1\times t = T_1$. $I_1 = T_1 / t = -2500\,t + 1000$. Располагаемый доход флегматиков $i_1 = I_1\times(1-t) = -2500\,t\times(1-t) + 1000\times(1-t) = 2500\,t^2 - 3500\,t + 1000$.

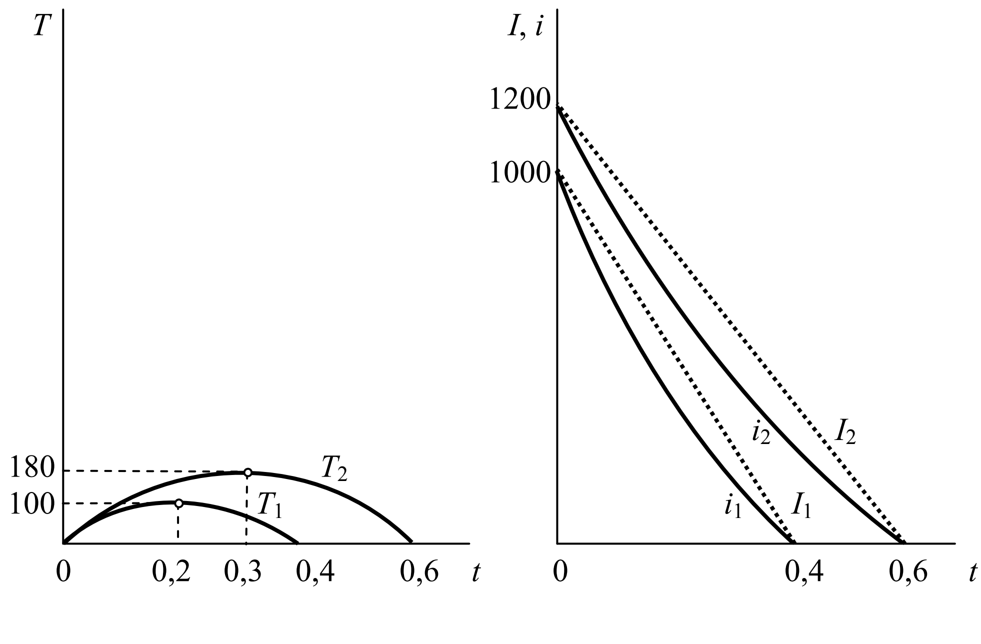
Рассуждая аналогичным образом, можно получить выражение для общего дохода холериков ($I_2 = -2000\,t + 1200$) и для их располагаемого дохода ($i_2 = 2000\,t^2 - 3200\,t +$ $+ 1200$).

Далее выясним взаимное расположение графиков функций i_1 и i_2. Для начала определим значения t, при которых $i_1 = i_2$.

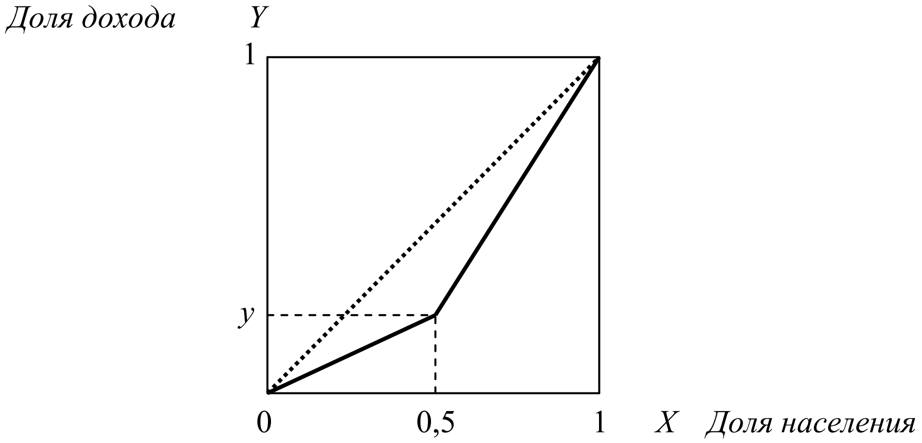
$2500\,t^2 - 3500\,t + 1000 = 2000\,t^2 - 3200\,t + 1200$. $5t^2 - 3t - 2 = 0$. $t_1 = 1$, $t_2 = -0{,}4$. Это означает, что на том интервале налоговой ставки, где *обе* группы населения работают и получают доход ($0 \le t < 0{,}4$) графики i_1 и i_2 не пересекаются.

При $t = 0$ $i_1 = 1000$, $i_2 = 1200$. Отсюда следует, что на всем интервале ($0 \le t < 0{,}4$) располагаемый доход холериков выше, чем располагаемый доход флегматиков.

Кривые Лаффера и графики функций T_1, T_2, I_1, I_2, i_1, i_2 показаны на рисунке, приведенном ниже.



Пусть доля флегматиков в общем располагаемом доходе равна y. Тогда кривая Лоренца для рассматриваемой страны имеет следующий вид:



Коэффициент Джини $G = \dfrac{0{,}5 - \dfrac{0{,}5\,y}{2} - \dfrac{y+1}{2}\times 0{,}5}{0{,}5} = 0{,}5 - y$. По условию $0{,}5 - y = \dfrac{1}{14}$.

$y = \dfrac{3}{7}$. $\dfrac{y}{1-y} = \dfrac{i_1}{i_2} = 0{,}75$. $2500\,t^2 - 3500\,t + 1000 = 0{,}75\times(2000\,t^2 - 3200\,t + 1200)$.

$10\,t^2 - 11\,t + 1 = 0$. $t_1 = 1$ (этот корень не подходит по смыслу задачи, так как при ставке налога 100% располагаемые доходы обеих групп населения равны нулю), $t_2 = 0{,}1$.

Ответ: 10%.

S022. Для одного продавца функция спроса имеет вид: $Q_d = 2{,}25 - P^2$. Этот продавец очень плохо знает микроэкономику, поэтому он думает, что «предельная выручка» – это то же самое, что и «максимальная выручка». Опираясь на свои ошибочные представления, он выбрал такой объем выпуска, при котором выручка численно равна предельной выручке. Сколько процентов от действительно максимальной выручки он сейчас получает?

Решение

$P = \sqrt{2{,}25 - Q}$. $R = PQ = Q\sqrt{2{,}25 - Q}$. $MR = R' = \sqrt{2{,}25 - Q} - \dfrac{Q}{2\sqrt{2{,}25 - Q}}$.

Продавец ошибочно полагает, что R должен быть равен MR.

$Q\sqrt{2{,}25 - Q} = \sqrt{2{,}25 - Q} - \dfrac{Q}{2\sqrt{2{,}25 - Q}}$. $Q(2{,}25 - Q) = (2{,}25 - Q) - 0{,}5Q$.

$Q^2 - 3{,}75Q + 2{,}25 = 0$. $Q_{1,2} = \dfrac{3{,}75 \pm \sqrt{14{,}0625 - 9}}{2} = \dfrac{3{,}75 \pm 2{,}25}{2}$. $Q_1 = 3$ (не подходит, так как при этом $P = \sqrt{2{,}25 - 3}$). $Q_2 = 0{,}75$. $P = \sqrt{2{,}25 - 0{,}75} = \sqrt{1{,}5}$. Таким образом, в настоящий момент продавец получает выручку $R = PQ = 0{,}75\sqrt{1{,}5}$.

Действительно максимальная выручка достигается при условии:

$MR = R' = \sqrt{2{,}25 - Q} - \dfrac{Q}{2\sqrt{2{,}25 - Q}} = 0$. $2{,}25 - Q - 0{,}5Q = 0$. $Q = 1{,}5$.

$P = \sqrt{2{,}25 - 1{,}5} = \sqrt{0{,}75}$. Максимальная выручка $R_{max} = \sqrt{0{,}75}\times 1{,}5$. Доля максимальной выручки, получаемая продавцом: $\dfrac{R}{R_{\max}} = \dfrac{0{,}75\sqrt{1{,}5}}{1{,}5\sqrt{0{,}75}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071$.

Ответ: 70,71%.

S023. Одному гражданину срочно потребовался пылесос, но он не располагал необходимой суммой для его покупки. «Не страшно, – сказал представитель торговой фирмы, – мы можем продать пылесос в рассрочку на 2 года. В конце каждого из двух лет вы внесете равные платежи по 3276 рублей. А сейчас ничего платить не надо». После этого гражданин поинтересовался, возможна ли рассрочка на 3 года. «Тоже можно, – сказал представитель фирмы. – Это будут три равных платежа по 2376 рублей в конце каждого из трех лет».

Еще раз оценив свои финансовые возможности, гражданин заявил, что рассрочка на 4 года его окончательно устроит. «Такая рассрочка предоставляется только в качестве исключения, – сказал представитель фирмы. – И только тем покупателям, которые смогут самостоятельно рассчитать размер ежегодного платежа с точностью до копеек».

Помогите гражданину определить размер ежегодного платежа, уплачиваемого в конце каждого года, при рассрочке платежа на 4 года.

Решение

Пусть PV – сегодняшняя стоимость пылесоса. Из условий рассрочки платежа на 2 года следует, что $PV = \dfrac{3276}{1+r} + \dfrac{3276}{(1+r)^2}$.

Из условий рассрочки на 3 года: $PV = \dfrac{2376}{1+r} + \dfrac{2376}{(1+r)^2} + \dfrac{2376}{(1+r)^3}$. Пусть $\dfrac{1}{1+r} = k$.

Тогда можно составить уравнение: $3276\,k + 3276\,k^2 = 2376\,k + 2376\,k^2 + 2376\,k^3$.

$2376\,k^3 - 900\,k^2 - 900\,k = 0$. Корень $k = 0$ не имеет смысла. Упростив уравнение, получаем: $66\,k^2 - 25\,k - 25 = 0$. $k_{1,2} = \dfrac{25 \pm \sqrt{625 + 6600}}{132} = \dfrac{25 \pm 85}{132}$. $k_1 = \dfrac{110}{132} = \dfrac{1}{1+r}$.

Отсюда $r = 0{,}2$. Второй корень уравнения $\left(k_2 = \dfrac{-60}{132}\right)$ не имеет смысла.

Определив ставку дисконтирования r, мы можем узнать сегодняшнюю стоимость пылесоса: $PV = \dfrac{3276}{1+0{,}2} + \dfrac{3276}{(1+0{,}2)^2} = 5005$ руб. Далее можно определить размер ежегодного платежа при рассрочке на 4 года: $5005 = \dfrac{x}{1{,}2} + \dfrac{x}{1{,}2^2} + \dfrac{x}{1{,}2^3} + \dfrac{x}{1{,}2^4} = 2{,}58873\,x$.

$x = 1933{,}38$ руб. *Ответ*: 1933,38 руб.

S024. На каждом квадратном километре сельской местности равномерно распределены 1000 домохозяйств. Однажды местные власти решили установить в одной из точек местности телевизионный ретранслятор. После того как домохозяйства оплатят сооружение ретранслятора, он будет представлять собой чистое общественное благо.

Предполагаемые расходы на сооружение ретранслятора: $TC = q \times r^3$, где q – количество телевизионных каналов, которое будет передавать ретранслятор, r – радиус охвата местности телевизионным вещанием.

Каждое домохозяйство имеет идентичную функцию спроса на услуги ретранслятора: $q = 100(1 - P)$, где q – количество каналов, которое согласится оплатить домохозяйство, финансируя сооружение ретранслятора, если цена подключения одного канала будет равна P.

Каким будет количество каналов, решают местные власти. На какое количество каналов должен быть рассчитан ретранслятор, если местные власти захотят собрать с домохозяйств максимально возможную сумму на его сооружение?

Решение

Сформулируем обратную функцию спроса: $P = 1 - 0{,}01q$. Сумма, которую заплатит одно домохозяйство за возможность приема q каналов: $Pq = q - 0{,}01q^2$.

Число домохозяйств, которое сможет принимать сигнал и согласится финансировать сооружение ретранслятора: $1000\,\pi\, r^2$. Общая сумма денег, которую заплатят эти домохозяйства в зависимости от числа принимаемых каналов: $1000\,\pi\, r^2\,(q - 0{,}01q^2)$.

Эта величина должна быть равна предполагаемым расходам на сооружение ретранслятора. То есть $1000\,\pi\, r^2\,(q - 0{,}01q^2) = q\, r^3$.

Отсюда $r = 1000\,\pi\,(1 - 0{,}01q)$.

Общая сумма денег, которую заплатят домохозяйства:
$1000\,\pi\, r^2\,(q - 0{,}01q^2) = 1000\,\pi\,[1000\,\pi\,(1 - 0{,}01q)]^2\,(q - 0{,}01q^2) =$
$= 1\,000\,000\,000\,\pi^3\, q\,(1 - 0{,}01q)^3$.

Максимум этой суммы достигается при условии: $(1 - 0{,}01q)^3 - 0{,}03q(1 - 0{,}01q)^2 = 0$.
$1 - 0{,}04q = 0$. $q = 25$.

Ответ. 25 каналов.

S025. Некий гуманоид использует для медитации оранжевые и зеленые шарики из полудрагоценных камней. Каждый шарик может быть использован в неограниченном числе актов медитации. Эффективность медитации определяется формулой: $U = X^a\, Y^b$, где X – число используемых при медитации оранжевых шариков, Y – число используемых зеленых шариков ($a > 0$, $b > 0$). В настоящее время гуманоид имеет некоторое количество шариков того и другого цвета (всего их 80), но, как показывает функция полезности, желательно иметь их как можно больше. Если бы можно было обменять зеленые шарики на оранжевые в пропорции 1 : 2, то гуманоид обменял бы 11 зеленых (из числа имеющихся у него) на 22 оранжевых. Если бы, наоборот, можно было обменять оранжевые на зеленые в пропорции 1 : 2, то гуманоид обменял бы 8 оранжевых на 16 зеленых.

Сколько оранжевых и сколько зеленых шариков имеет гуманоид в настоящее время?

Внимание: ответ должен быть численным; он не должен выражаться через a и b.

Решение

Пусть первоначальное количество оранжевых шариков равно X_0, зеленых – Y_0.

Критерий оптимума для функции Кобба-Дугласа: $\frac{1}{a} P_X\, X = \frac{1}{b} P_Y\, Y$, где X и Y - объемы благ *после обмена*.

Рассмотрим первую ситуацию, где $\frac{P_Y}{P_X} = 2$. $\frac{1}{a} P_X\, X = \frac{1}{b} 2 P_X\, Y$. $\frac{1}{a} X = \frac{1}{b} 2Y$.

$$\frac{1}{a}(X_0 + 22) = \frac{1}{b} 2\,(Y_0 - 11) \qquad \textbf{(1)}.$$

Рассмотрим вторую ситуацию, где $\frac{P_X}{P_Y} = 2$. $\frac{1}{a} 2\, P_Y\, X = \frac{1}{b} P_Y\, Y$. $\frac{1}{a} 2\, X = \frac{1}{b}\, Y$.

$$\frac{1}{a} 2\,(X_0 - 8) = \frac{1}{b}\,(Y_0 + 16) \qquad \textbf{(2)}.$$

Поделив соответственно правые и левые части уравнений **(1)** и **(2)** друг на друга, получим: $0{,}5 \times \frac{X_0 + 22}{X_0 - 8} = 2 \times \frac{Y_0 - 11}{Y_0 + 16}$. $0{,}5(X_0 + 22)(Y_0 + 16) = 2(Y_0 - 11)(X_0 - 8)$.

Из условия известно, что $X_0 + Y_0 = 80$. $Y_0 = 80 - X_0$. $(X_0 + 22)(80 - X_0 + 16) =$
$= 4(80 - X_0 - 11)(X_0 - 8)$. $3X_0^2 - 234X_0 + 4320 = 0$. $X_0^2 - 78X_0 + 1440 = 0$.
$X_{01} = 48$, $X_{02} = 30$. $Y_{01} = 80 - X_{01} = 32$. $Y_{02} = 80 - X_{02} = 50$.

Ответ. В настоящее время гуманоид имеет либо 48 оранжевых шариков и 32 зеленых, либо 30 оранжевых и 50 зеленых.

S026. В расчете на месяц гражданка N имеет следующую функцию полезности: $U = f(X, Y)$, где X – число пирожных-эклеров, Y – расходы на все остальные товары (в рублях). Предельная полезность (MU) эклеров подчиняется следующей закономерности:

MU первого эклера равна 100 единицам полезности,

MU второго эклера на 1 единицу меньше, чем MU первого,

MU третьего эклера на 2 единицы меньше, чем MU второго,

MU четвертого эклера на 3 единицы меньше, чем MU третьего.

И так далее.

MU первого рубля, потраченного на все остальные товары, равна 100 единицам полезности. MU второго рубля равна 99, MU третьего рубля равна 98, MU четвертого рубля равна 97. И так далее.

Месячный бюджет гражданки N составляет 640 рублей. Определите дуговую эластичность спроса гражданки N на эклеры на интервале цены $P_X \in [10; 18]$.

Решение

$MU_X = 100 - \dfrac{1+(X-1)}{2} \times (X-1) = -0{,}5X^2 + 0{,}5X + 100$. $MU_Y = 100 - (Y-1) = 101 - Y$.

$640 = P_X X + Y$. $Y = 640 - P_X X$. $MU_Y = 101 - Y = 101 - (640 - P_X X) = P_X X - 539$.

Условие оптимума: $\dfrac{MU_X}{P_X} = \dfrac{MU_Y}{P_Y}$. Очевидно, цена одной единицы товара Y (т.е. одного рубля) равна одному рублю. $\dfrac{-0{,}5X^2 + 0{,}5X + 100}{P_X} = \dfrac{P_X X - 539}{1}$.

При $P_1 = 10$ получаем уравнение: $-0{,}5X_1^2 - 99{,}5X_1 + 5490 = 0$. $X_1 = 45$ (второй корень получается отрицательным и не подходит по смыслу задачи).

При $P_2 = 18$: $-0{,}5X_2^2 - 323{,}5X_2 + 9802 = 0$. $X_2 = 29$ (второй корень также отрицателен).

Дуговая эластичность спроса:

$$\varepsilon = \frac{X_2 - X_1}{P_2 - P_1} \times \frac{P_1 + P_2}{X_1 + X_2} = \frac{29-45}{18-10} \times \frac{10+18}{45+29} = -\frac{28}{37}.$$

Ответ: $-\dfrac{28}{37}$.

S027. Половину трудоспособного населения одной страны составляют гедонисты (проще говоря, изнеженные лентяи), другую половину – трудоголики. Функция предложения труда гедонистов: $L_1 = -0{,}1w^2 + 24w - 900$; функция предложения труда трудоголиков: $L_2 = -0{,}1w^2 + 20w$ (L_1, L_2 – предложение труда в часах рабочего времени в течение месяца, w – почасовая ставка заработной платы). Ставка заработной платы устанавливается правительством на одном уровне для обеих групп населения, при этом выбирается такое значение w, которое обеспечивает ненулевое предложение труда как со стороны гедонистов, так и со стороны трудоголиков. Очевидно, месячный доход тех и других рассчитывается по формуле: $I = wL$.

Однажды правительство решило, что существующее значение коэффициента Джини ($^1/_6$), рассчитываемое на основе месячных доходов, слишком велико для их страны и постановило увеличить ставку зарплаты для всех категорий населения до такого уровня, который обеспечивает минимальное значение указанного коэффициента.

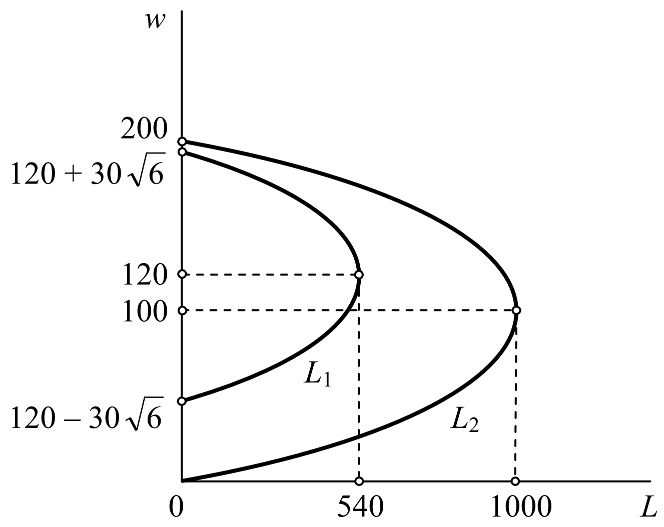
a) На сколько денежных единиц правительство увеличило ставку заработной платы?

b) Какое значение коэффициента Джини было при этом достигнуто?

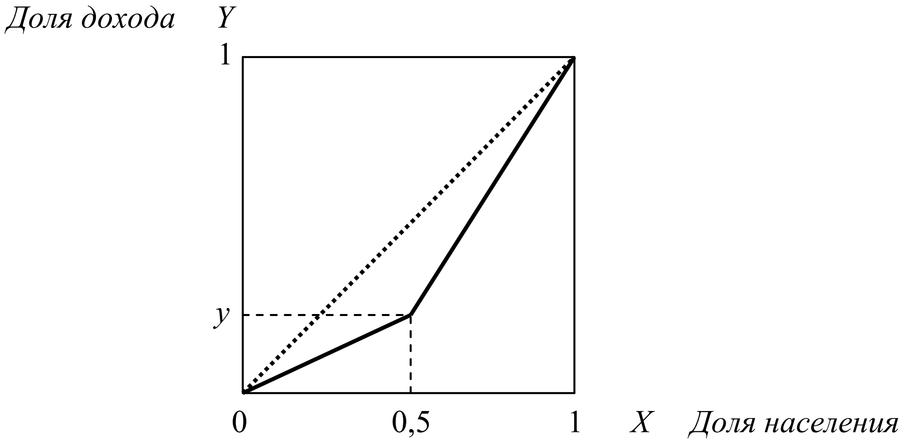
Решение

Легко доказать, что гедонисты предлагают труд при таких значениях заработной платы, которые находятся на интервале $w \in (120 - 30\sqrt{6}\,;\ 120 + 30\sqrt{6}\,)$. Аналогично для трудоголиков: $w \in (0;\,200)$. $120 - 30\sqrt{6} > 0$. $120 + 30\sqrt{6} < 200$. То есть в соответствии с условием задачи ставка зарплаты, устанавливаемая правительством, находится на интервале $w \in (120 - 30\sqrt{6}\,;\ 120 + 30\sqrt{6}\,)$.

$L_2 - L_1 = (-\,0{,}1w^2 + 20w) - (-\,0{,}1w^2 + 24w - 900) = 900 - 4w$. При максимальном значении $w = 120 + 30\sqrt{6}$ мы имеем: $L_2 - L_1 = 900 - 4\times(120 + 30\sqrt{6}\,) = 420 - 120\sqrt{6} = \sqrt{176400} - \sqrt{86400} > 0$. Это означает, что месячный доход трудоголиков всегда будет выше месячного дохода гедонистов. Т.е. гедонисты при построении кривой Лоренца будут отнесены к группе «бедных». На приведенном ниже рисунке показано взаимное расположение графиков функций предложения труда гедонистов и трудоголиков.



Предположим, первоначально доля гедонистов в общем располагаемом доходе равна y. Тогда кривая Лоренца для рассматриваемой страны имеет следующий вид:



Коэффициент Джини $G = \dfrac{0{,}5 - \dfrac{0{,}5\,y}{2} - \dfrac{y+1}{2}\times 0{,}5}{0{,}5} = 0{,}5 - y$. По условию $G = 0{,}5 - y = \dfrac{1}{6}$. $y = \dfrac{1}{3}$. $L_1 = \dfrac{L_1 + L_2}{3}$. $2L_1 = L_2$. $2\times(-\,0{,}1w^2 + 24w - 900) = -\,0{,}1w^2 + 20w$.

$-0{,}1w^2 + 28w - 1800 = 0$. $w_1 = 100$, $w_2 = 180$. Пока мы не знаем, какой из этих корней удовлетворяет условиям задачи (т.е. показывает первоначальную ставку заработной платы). Поэтому примем к сведению оба. (*Внимание*: мы еще вернемся к этому месту в наших вычислениях).

Теперь определим, при каком значении w достигается минимальный на исследуемом интервале коэффициент Джини. Очевидно, этот минимум достигается тогда, когда минимальна относительная разница между L_1 и L_2. В данной задаче проще всего минимизировать следующее отношение: $\frac{L_2 - L_1}{L_2}$ (Разумеется, при условии, что $L_2 > L_1$).

$$\frac{L_2 - L_1}{L_2} = \frac{-4w + 900}{-0{,}1w^2 + 20w}. \qquad \left(\frac{L_2 - L_1}{L_2}\right)' = \frac{-4(-0{,}1w^2 + 20w) - (-4w + 900)(-0{,}2w + 20)}{(-0{,}1w^2 + 20w)^2} =$$

$$= \frac{-0{,}4w^2 + 180w - 18\,000}{(-0{,}1w^2 + 20w)^2} = 0.$$ $-0{,}4w^2 + 180w - 18000 = 0$. $w_1 = 150$, $w_2 = 300$ (этот корень не отвечает ранее сформулированному условию: $120 - 30\sqrt{6} < w < 120 + 30\sqrt{6}$).

Докажем, что при $w = 150$ действительно достигается минимум функции $\frac{L_2 - L_1}{L_2}$. Для этого возьмем вторую производную функции и определим ее значение при $w = 150$.

$$\left(\frac{L_2 - L_1}{L_2}\right)'' =$$

$$= \frac{(-0{,}8w + 180)(-0{,}1w^2 + 20w)^2 - 2(-0{,}4w^2 + 180w - 18\,000)(-0{,}1w^2 + 20w)(-0{,}2w + 20)}{(-0{,}1w^2 + 20w)^4} =$$

$$= +\frac{1}{9375}.$$ Вторая производная положительна. Это значит, что мы получили минимум.

Теперь вернемся к этапу решения, где мы получили два значения первоначальной ставки заработной платы: $w_1 = 100$, $w_2 = 180$. Сейчас мы выяснили, что минимальное значение коэффициента Джини достигается при $w = 150$. Из условия задачи нам известно, что правительство *повысило* ставку заработной платы. То есть начальным значением было $w = 100$. Таким образом, ставка заработной платы была увеличена на 50 денежных единиц.

При $w = 150$ $L_1 = 450$, $L_2 = 750$. Доля гедонистов («бедных») в общем доходе:

$$y = \frac{450}{450 + 750} = 0{,}375. \quad G = 0{,}5 - y = 0{,}125.$$

Ответ. a) на 50; b) 0,125.

S028. В одной маленькой стране построен самый передовой общественный строй. Так, по крайней мере, утверждают ее руководители. К сожалению, в условиях самого передового общественного строя трудящие употребляют в пищу всего лишь два продукта – хлеб и картофель. То и другое распределяется по продовольственным карточкам. Каждый трудящийся получает в расчете на год 100 хлебных и 240 картофельных карточек. Каждая карточка дает право на получение одного килограмма соответствующего продукта. При этом половина трудящихся имеет функцию полезности $U_1 = XY$, а другая половина – $U_2 = X^3Y$ (здесь X – потребление хлеба в килограммах, Y – потребление картофеля в килограммах, то и другое в расчете на год). Как вы сами догадываетесь, различия в предпочтениях дают повод к стихийному обмену карточками.

Вопрос: сколько картофельных карточек дают за одну хлебную?

Решение

Рассмотрим обмен между двумя потребителями – «первым» и «вторым». Первый имеет функцию полезности U_1, второй – U_2. Предположим, в этом обмене существует равновесная цена хлебной карточки P_X, представляющая собой число картофельных карточек, которое обменивается на одну хлебную. Поскольку мы выражаем все цены в картофельных карточках, то, разумеется, цена картофельной карточки равна одной картофельной карточке. То есть $P_Y = 1$.

Предельная норма замещения картофеля хлебом для первого потребителя:
$MRS_{XY} = \dfrac{MU_X}{MU_Y} = \dfrac{Y_1}{X_1}$. В тот момент, когда он получил 100 хлебных и 240 картофельных карточек, $MRS_{XY} = \dfrac{Y_1}{X_1} = \dfrac{240}{100} = 2{,}4$. То есть в начальный момент обмена первый потребитель при сохранении прежнего уровня полезности может поменять одну хлебную карточку на 2,4 картофельных. А если он поменяет на одну хлебную карточку *больше*, чем на 2,4 картофельных, то общая полезность его набора благ увеличится.

Предельная норма замещения картофеля хлебом для второго потребителя:
$MRS_{XY} = \dfrac{MU_X}{MU_Y} = \dfrac{3X_2^2Y_2}{X_2^3} = \dfrac{3Y_2}{X_2}$. В момент получения карточек $MRS_{XY} = \dfrac{3Y_2}{X_2} = \dfrac{3\times 240}{100} = 7{,}2$. Это значит, что в данный момент при сохранении прежнего уровня полезности второй потребитель может поменять 7,2 картофельных карточки на одну хлебную. Если же он получит хлебную карточку в обмен на *меньшее* количество картофельных, то его общая полезность тоже увеличится.

Таким образом, существует такое значение $P_X \in (2{,}4;\ 7{,}2)$, при котором обмен выгоден для обоих потребителей. То есть первый потребитель отдаст второму некоторое количество (скажем, z) хлебных карточек, а второй потребитель отдаст первому картофельные карточки общим числом $P_X z$.

Оптимум первого и второго потребителей достигается при условии: $MRS_{XY} = \dfrac{P_X}{P_Y} = P_X$.

$$\frac{Y_1}{X_1} = \frac{3Y_2}{X_2} = P_X. \qquad \frac{240 + P_X z}{100 - z} = \frac{3(240 - P_X z)}{100 + z} = P_X.$$

$$\begin{cases} 240 + P_X z = P_X(100 - z) \\ 3(240 - P_X z) = P_X(100 + z) \end{cases} \qquad \begin{cases} 2P_X z - 100P_X + 240 = 0 \\ -4P_X z - 100P_X + 720 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4P_X z - 200P_X + 480 = 0 \\ -4P_X z - 100P_X + 720 = 0 \end{cases}$$

Складывая последние два уравнения, находим: $300P_X = 1200$. $P_X = 4$.

Ответ: 4.

S029. Однажды ученые-антропологи встретили в лесу питекантропа, который умел делать простые орудия труда – палки-копалки. Для изготовления одной палки-копалки ему требовался целый рабочий день. Будем считать, что палка-копалка выходила из строя в пределах того же месяца, в течение которого и была изготовлена. Производственная функция питекантропа имела вид: $Q = (K + 3)L^2$, где Q – число выкопанных в течение месяца корнеплодов, K – число изготовленных и использованных в течение месяца палок-копалок, L – число рабочих дней в течение месяца, которое питекантроп мог посвятить поиску и выкапыванию корнеплодов.

Питекантроп не имел выходных и работал 30 дней в месяц, распределяя эти дни между изготовлением палок-копалок и выкапыванием корнеплодов таким образом, чтобы максимизировать общее количество корнеплодов. Антропологи пожалели питекантропа и решили подарить ему некоторое количество палок-копалок, произведенных фабричным способом. Сколько, как минимум, готовых палок-копалок должны подарить питекантропу антропологи в расчете на месяц для того, чтобы он в течение месяца занимался только поиском и выкапыванием корнеплодов?

Решение

Пусть искомое число палок-копалок равно x. Тогда производственная функция питекантропа принимает вид: $Q = (K + 3 + x)L^2$, где K – это по-прежнему число палок-копалок, изготовленных самим питекантропом.

$Q = (K + 3 + x)L^2 = (K + 3 + x)(30 - K)^2 = (K + 3 + x)(900 - 60K + K^2) =$
$= 900K - 60K^2 + K^3 + 2700 - 180K + 3K^2 + 900x - 60xK + xK^2 =$
$= K^3 + (x - 57)K^2 + (720 - 60x)K + 900x + 2700.$

Q_{max} достигается при условии: $Q' = 3K^2 + 2(x - 57)K + 720 - 60x = 0.$
Если $K = 0$, то $60x = 720$. $x = 12$.

Ответ: 12 палок-копалок.

S030. Весь свой годовой доход (30 000 рублей) пенсионер Ветеранов расходует на два продукта – вермишель «Роллтон» (6 руб. за пачку) и горчицу «Распутин» (15 руб. за банку). В супермаркете, где пенсионер приобретает продукты, введена система премий для постоянных покупателей. За каждые 5 пачек «Роллтона», купленных за деньги, Ветеранов получает в подарок одну банку горчицы. Купив за деньги две банки горчицы, пенсионер получает бесплатно одну пачку «Роллтона». Функция полезности пенсионера имеет вид: $U = XY$, где X, Y – объемы вермишели и горчицы, фактически поступившие в потребление.

Сколько пачек «Роллтона» и банок горчицы фактически поступит в потребление пенсионера за год? Сколько единиц того и другого продукта он купит за деньги?

Решение

Будем считать, что X_m, Y_m – объемы вермишели и горчицы, купленные за деньги. В этом случае общие объемы потребления продуктов можно выразить следующим образом:
$X = X_m + 0{,}5Y_m$; $Y = Y_m + 0{,}2\,X_m$. Из первого уравнения $Y_m = 2X - 2X_m$. Подставим это выражение во второе уравнение: $Y = 2X - 2X_m + 0{,}2\,X_m$. $X_m = (2X - Y) : 1{,}8$.
$Y_m = 2X - 2(2X - Y) : 1{,}8$.

Из бюджетного ограничения следует, что
$30\,000 = 6X_m + 15Y_m = 6(2X - Y) : 1{,}8 + 15\cdot[2X - 2(2X - Y) : 1{,}8]$;
$9000 = X + 4Y$; $X = 9000 - 4Y$.

Представим функцию полезности как функцию одной переменной:
$U = XY = 9000Y - 4Y^2$. $U' = 9000 - 8Y = 0$. $Y = 1125$. $X = 9000 - 4 \cdot 1125 = 4500$.
$Y_m = 2X - 2(2X - Y) : 1{,}8 = 250$. $X_m = (2X - Y) : 1{,}8 = 4375$.

Ответ. Фактически поступит в потребление 4500 пачек «Роллтона» и 1125 банок горчицы, из них будет куплено за деньги: 4375 пачек «Роллтона» и 250 банок горчицы.

S031. Функции спроса и предложения имеют вид: $Q_d = a - P$; $Q_s = P - b$. Государство может ввести для потребителей либо потоварный налог в размере t_1 денежных единиц, либо налог в процентах от цены товара в размере t_2. Известно, что при увеличении ставок налогов до $t_1 = 4$ (если введен потоварный налог) и $t_2 = 20\%$ (если введен налог в процентах от цены) общая сумма налоговых поступлений становится равной нулю.

Сформулируйте уравнения функций спроса и предложения.

Решение

После введения потоварного налога функция спроса имеет вид: $Q_{d1} = a - (P + t_1)$.
$Q_{d1} = Q_s$. $a - (P + t_1) = P - b$. $P = 0{,}5(a + b - t_1)$. $Q = P - b = 0{,}5(a - b - t_1)$. Общая сумма налоговых поступлений: $T_1 = t_1 Q = 0{,}5\, t_1\, (a - b - t_1) = 0{,}5 \times 4 \times (a - b - 4) = 0$.
$a = b + 4$.

Если введен налог в процентах от цены, то функция спроса принимает вид:

$$Q_{d1} = a - \left(P + \frac{t_2}{100}P\right). \quad Q_{d1} = Q_s. \quad a - \left(P + \frac{t_2}{100}P\right) = P - b. \quad P = \frac{a+b}{2 + 0{,}01\, t_2}.$$

$$Q = P - b = \frac{a+b}{2 + 0{,}01\, t_2} - b.$$

Общие расходы потребителей: $PQ = \dfrac{a+b}{2 + 0{,}01\, t_2}\left(\dfrac{a+b}{2 + 0{,}01\, t_2} - b\right)$

Общая сумма налоговых поступлений: $T_2 = PQ\,\dfrac{t_2}{100} = \dfrac{a+b}{2 + 0{,}01\, t_2}\left(\dfrac{a+b}{2 + 0{,}01\, t_2} - b\right)\dfrac{t_2}{100} = 0.$

$\dfrac{a+b}{2 + 0{,}01\, t_2} - b = 0.$ $(a + b) : 2{,}2 = b$. $2b + 4 = 2{,}2b$. $b = 20$. $a = 24$.

Ответ: $Q_d = 24 - P$; $Q_s = P - 20$.

S032. Население одной бедной страны питается одним только картофельно-луковым супом. Картофель и лук люди могут купить только в одной из двух торговых систем, которые продают указанные продукты в виде следующих суповых наборов:

1) набор из 1 картофелины и 2 луковиц (цена набора 20 денежных единиц);
2) набор из 4 картофелин и 1 луковицы (цена набора 30 денежных единиц).

Функция полезности каждого жителя имеет вид: $U = XY$, где X – число картофелин, Y – число луковиц. Месячный доход каждого жителя составляет 800 денежных единиц. Весь он расходуется на приобретение картофеля и лука. Сколько картофелин и луковиц ежемесячно съедает каждый житель, максимизируя свою функцию полезности?

Решение

Пусть a – число наборов типа a, b – число наборов типа b.
Бюджет $I = 20a + 30b = 800$. $a = 40 - 1{,}5b$. $X = a + 4b = 40 - 1{,}5b + 4b = 40 + 2{,}5b$.
$Y = 2a + b = 80 - 3b + b = 80 - 2b$. $U = XY = (40 + 2{,}5b)(80 - 2b) = -5b^2 + 120b + 3200$.
$U' = -10b + 120 = 0$. $b = 12$. $a = 22$. $X = a + 4b = 70$. $Y = 2a + b = 56$.

Ответ. 70 картофелин и 56 луковиц.

S033. Карта кривых безразличия одного индивида представляет собой бесконечное множество кривых вида: $Y = 0{,}05X^2 - 6X + U$, где X – объем блага X ($0 < X < 50$), Y – объем блага Y ($Y > 0$), U – общая полезность наборов благ X и Y, обозначаемых данной кривой безразличия. Известно, что первоначально, максимизируя полезность, индивид приобретал на свой бюджет 60 единиц блага Y и некоторое количество блага X.

Когда бюджет индивида увеличился в 2 раза, он смог приобретать набор благ, общая полезность которого на 87,5% больше первоначальной. Сколько единиц блага X и сколько единиц блага Y приобретает индивид после того, как увеличился его бюджет?

Решение

Производная Y'_X численно равна тангенсу угла наклона бюджетной линии в точке касания. В данной задаче для всех кривых безразличия эта производная будет иметь один и тот же вид: $Y'_X = 0{,}1X - 6$ (Поскольку U – постоянная величина для каждой данной кривой безразличия). Так как цены товаров не изменяются, все бюджетные линии будут иметь один и тот же тангенс угла наклона, равный $\left(-\dfrac{P_X}{P_Y}\right)$. Это значит, что для всех кривых безразличия в соответствующих им точках оптимума численные значения производных будут одинаковыми. Если первоначальное значение X равно X_1, а новое значение (после увеличения бюджета) равно X_2, то

$$0{,}1X_1 - 6 = 0{,}1X_2 - 6 = -\frac{P_X}{P_Y} \quad \textbf{(1)}. \qquad \text{Кстати, отсюда } X_1 = X_2.$$

Пусть цены товаров X и Y равны P_X и P_Y. Тогда первоначальный бюджет можно выразить как $I_1 = P_X X_1 + P_Y Y_1 = P_X X_1 + P_Y 60$.

Новый бюджет: $I_2 = P_X X_2 + P_Y Y_2 = P_X X_1 + P_Y Y_2$.

Из условия задачи следует, что $I_2 = 2I_1$. То есть $P_X X_1 + P_Y Y_2 = 2(P_X X_1 + P_Y 60)$.

Разделив обе части этого уравнения на ($-P_Y$) и затем используя равенство **(1)**, получим:

$$\left(-\frac{P_X}{P_Y}\right)X_1 - Y_2 = 2\left(-\frac{P_X}{P_Y}\right)X_1 - 120. \qquad Y_2 = 120 - \left(-\frac{P_X}{P_Y}\right)X_1 = 120 - (0{,}1X_1 - 6)\,X_1.$$

$$Y_2 = -0{,}1X_1^2 + 6X_1 + 120 \quad \textbf{(2)}.$$

Из уравнения кривой безразличия: $U = -0{,}05X^2 + 6X + Y$. Первоначальное значение функции полезности: $U_1 = -0{,}05X_1^{\,2} + 6X_1 + 60$. Новое значение функции полезности: $U_2 = -0{,}05X_2^{\,2} + 6X_2 + Y_2 = -0{,}05X_1^{\,2} + 6X_1 + Y_2$.

Из условия задачи следует, что $U_2 = 1{,}875U_1$.

То есть $-0{,}05X_1^{\,2} + 6X_1 + Y_2 = 1{,}875(-0{,}05X_1^{\,2} + 6X_1 + 60)$.

Отсюда $Y_2 = -0{,}04375X_1^2 + 5{,}25X_1 + 112{,}5$ **(3)**.

Используя **(2)** и **(3)**, можно записать равенство:

$$-0{,}1X_1^2 + 6X_1 + 120 = -0{,}04375X_1^2 + 5{,}25X_1 + 112{,}5. \qquad 0{,}05625X_1^2 - 0{,}75X_1 - 7{,}5 = 0.$$

Единственный положительный (т.е. имеющий смысл) корень уравнения: $X_1 = 20$. Как мы уже доказали, объем потребления блага после увеличения бюджета будет таким же, т.е. $X_2 = 20$. Из уравнения **(2)** $Y_2 = -0{,}1\times 20^2 + 6\times 20 + 120 = 200$.

Ответ. После увеличения бюджета индивид потребляет 20 единиц X и 200 единиц Y.

S034. Предположим, на фондовом рынке продаются ценные бумаги только двух видов: A и B. В данный момент эти бумаги стоят одинаково – по 100 рублей каждая. При этом стоимость ценной бумаги типа A каждый месяц возрастает на 5 рублей по отношению к предыдущему месяцу; стоимость бумаги B каждый месяц возрастает на 0,5% к стоимости предыдущего месяца. Инвестор в любой момент может купить или продать любое конечное количество ценных бумаг A и B по текущей цене. Каких–либо иных приносящих доход активов и депозитов, куда бы могли вложить свои деньги инвесторы, не существует. Какие бумаги первоначально купит инвестор и на какой минимальный срок?

Решение

Очевидно, первоначально более выгодно приобретение бумаг типа A. Вместе с тем нетрудно заметить, что стоимость бумаги B прирастает на один и тот же процент, в то время как процент прироста стоимости A с каждым месяцем сокращается. Неизбежно наступит момент, когда 0,5% стоимости бумаги A будут равны 5 рублям. Это значит, что в течение следующего месяца прирост стоимости бумаги A будет таким же, как и у бумаги B. А в дальнейшем каждый месячный прирост стоимости бумаги B будет больше прироста стоимости A.

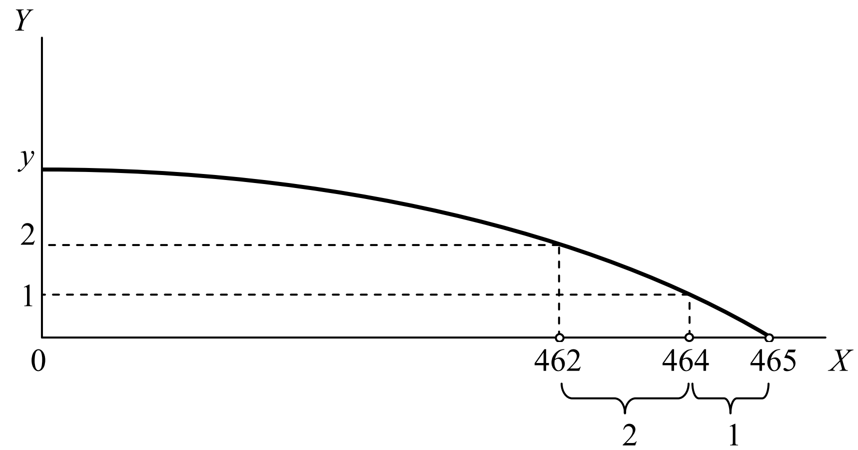
То есть в тот момент, когда 0,5% стоимости бумаги A становятся равными 5 рублям, заканчивается минимальное время, когда имеет смысл их хранить.

Если 0,5% стоимости бумаги A равны 5 рублям, то это значит, что ее полная стоимость равна 5 : 0,005 = 1000 руб. Первоначально бумага A стоила 100 рублей, т.е. прирост стоимости составил 900 руб. Число месяцев, в течение которых происходит этот прирост, равно: 900 : 5 = 180 (или 15 лет).

Ответ: на срок 15 лет инвестор купит бумаги A, затем продаст их и на вырученные деньги купит бумаги B.

S035. Одна страна может производить только два вида изделий – фугасы (Y) и контрабасы (X). Известно, что максимальное производство контрабасов может составить 465 штук (в том случае, если фугасы вообще не производятся). Для того чтобы произвести первый фугас, страна должна отказаться от выпуска одного контрабаса. Альтернативные издержки производства каждого последующего фугаса на единицу больше альтернативных издержек производства предыдущего. Какое максимальное количество фугасов может произвести страна (в случае, если контрабасы вообще не производятся?)

Решение



Предположим, мы начали строить КПВ из известной нам точки (465; 0). На первом шаге мы уменьшаем X на одну единицу и получаем прирост Y на одну единицу. На втором шаге, уменьшая X на 2 единицы, получаем снова прирост Y на одну единицу. И так далее – до тех пор, пока X не станет равным 0 (а Y при этом достигнет максимума, равного y). Очевидно, на этом пути по оси OX мы сделаем y шагов, каждый из которых на единицу больше предыдущего. Суммарная длина этих шагов будет равна 465.

По формуле суммы членов арифметической прогрессии:

$$\frac{1+y}{2}\cdot y = 465. \quad y^2 + y - 930 = 0. \; y_1 = 30, \; y_2 = -31 \text{ (не подходит по условию задачи).}$$

Ответ: 30 фугасов.

S036. В курортном городе, выросшем вокруг источника минеральной воды, единственным доходом всех домохозяйств является квартирная плата, получаемая от сдачи комнат курортникам. При этом домохозяйства равномерно распределены по всей площади города. Для каждого домохозяйства ежегодный доход от сдачи комнат определяется по формуле: $i = h - s$, где h – максимальный доход от сдачи комнат (его получают домохозяйства, расположенные рядом с источником), s – расстояние по прямой от источника до домохозяйства в километрах.

Сформулируйте уравнение кривой Лоренца для домохозяйств данного города в виде: $Y = f(X)$, где X – доля домохозяйств, Y – доля дохода ($0 \le X \le 1$, $0 \le Y \le 1$).

Решение

Предположим, на каждом квадратном километре города размещается N домохозяйств. Поскольку при $s > h$ доход становится равным нулю, город в плане имеет вид круга радиусом h. При этом наименее обеспеченные домохозяйства находятся на окружности радиусом h. По мере приближения к центру города, где расположен источник минеральной воды, доход домохозяйств постепенно возрастает вплоть до максимального значения (h). Общее число домохозяйств в городе будет равно $N\pi h^2$.

Рассмотрим кольцо (ограниченное окружностями с радиусами h и s, при этом s может принимать значения от 0 до h), в котором находятся домохозяйства, менее обеспеченные по сравнению с домохозяйствами центрального круга (см. рис. 1). Число домохозяйств, расположенных в этом кольце, будет равно: $N(\pi h^2 - \pi s^2) = N\pi(h^2 - s^2)$. *Доля* домохозяйств, расположенных на расстоянии s от источника *и далее* (т.е. наименее обеспеченных) будет равна: $X = \dfrac{N\pi(h^2 - s^2)}{N\pi h^2} = 1 - \dfrac{s^2}{h^2}$ **(1)**.

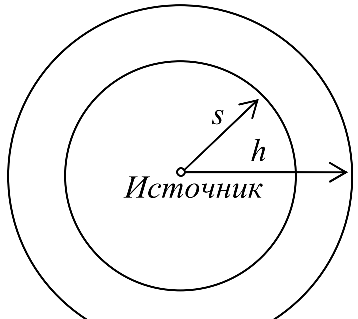


Рис. 1.

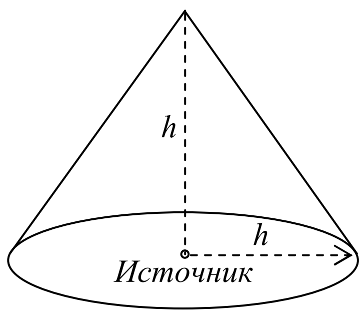


Рис. 2.

Для домохозяйств, расположенных рядом с источником, $s = 0$, поэтому доход $i = h$. По мере удаления от источника доход убывает линейно в соответствии с формулой: $i = h - s$. Поэтому общий доход, получаемый всеми домохозяйствами, вместе взятыми, будет численно равен объему конуса, показанного на рис. 2. Объем этого конуса составит: $\frac{1}{3} h \times \pi h^2 = \frac{1}{3} \pi h^3$.

Попробуем определить доход домохозяйств, которые находятся внутри кольца, показанного на рис. 1. Для этого нарисуем еще один конус (рис. 3, левая часть).

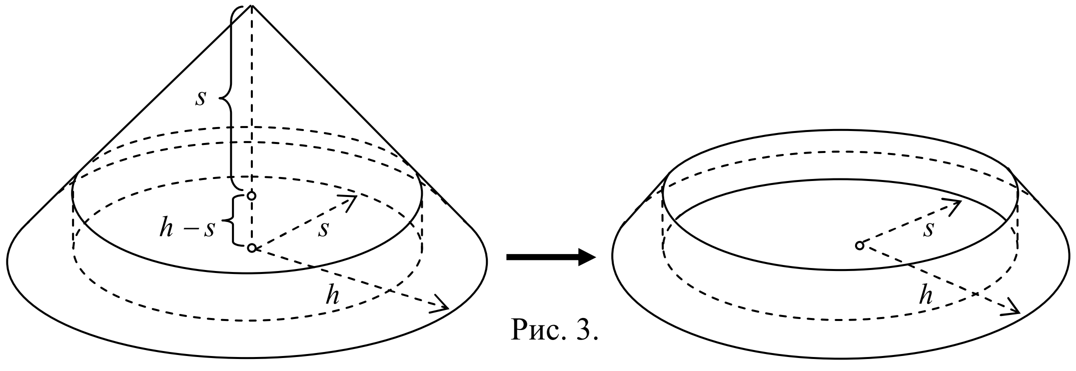


Рис. 3.

Очевидно, доход домохозяйств, расположенных в кольце на краю города, будет численно равен объему всего конуса, показанного на рис.2, за вычетом двух составляющих:

а) верхнего конуса, имеющего высоту s и радиус основания s;

б) цилиндра в низу конуса, имеющего высоту $(h - s)$ и радиус s.

Если мы вырежем из конуса, показанного на рис. 2, эти составляющие *а*) и *б*), то получим фигуру на рис. 3 (правая часть). Объем этой фигуры будет равен величине:
$\frac{1}{3}\pi h^3 - \frac{1}{3} s \times \pi s^2 - (h - s) \times \pi s^2 = \pi(\frac{1}{3} h^3 + \frac{2}{3} s^3 - h s^2)$.

Исходя из этого, *доля дохода* домохозяйств, расположенных на расстоянии s от источника *и далее* (т.е. наименее обеспеченных) будет равна:

$$Y = \frac{\pi\left(\frac{h^3}{3} + \frac{2s^3}{3} - hs^2\right)}{\frac{\pi h^3}{3}} = 1 + 2\frac{s^3}{h^3} - 3\frac{s^2}{h^2}.$$ Используя **(1)**, выразим s через X:

$s = h\sqrt{1 - X}$. Подставим это значение s в выражение для Y:

$$Y = 1 + 2\frac{h^3\sqrt{(1 - X)^3}}{h^3} - 3\frac{h^2(1 - X)}{h^2} = 1 + 2(1 - X)^{1,5} - 3 + 3X = 3X + 2(1 - X)^{1,5} - 2.$$

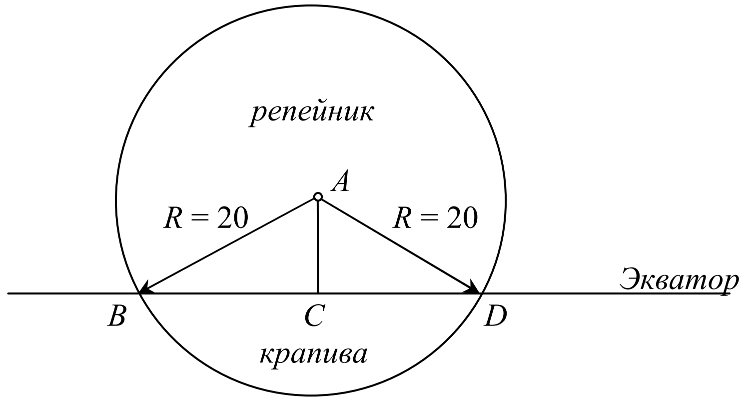
Полученное выражение и есть уравнение кривой Лоренца.

Ответ. $Y = 3X + 2(1 - X)^{1,5} - 2$.

S037. Этнически самобытная африканская женщина, живущая вблизи Экватора, имеет в собственности одно-единственное домашнее животное – высокоудойную африканскую козу. Каждый день женщина оставляет козу пастись, привязывая ее веревкой длиной 20 м к колышку, забитому в землю. В той местности, где проживает женщина, к северу от Экватора растет только репейник, к югу – только крапива. В течение светового дня коза съедает всю доступную для нее растительность, каждый час полностью объедая траву на одном и том же количестве квадратных метров – независимо от того, что на них растет. Коза могла бы съесть и больше, но, к сожалению, у самобытной африканской женщины нет другой веревки. Функция полезности козы имеет вид: $U = X^a\, Y^{1-a}$, где X – площадь, очищенная от репейника, Y – площадь, очищенная от крапивы. Известно, что этнически самобытная женщина, максимизируя функцию полезности козы, забивает колышек в 10 метрах севернее Экватора. Определите с точностью до 0,1 показатель степени a в функции полезности козы.

Решение

На рисунке показана окружность, внутри которой может пастись коза.



По условию $AC = 10$. Легко доказать, что $\angle BAC = \angle CAD = 60^{\circ}$. Тогда площадь сектора ABD равна трети площади круга, т.е. $\frac{400\pi}{3}$. $BC = CD = \sqrt{20^2 - 10^2} = 10\sqrt{3}$.

Площадь $\triangle ABD$ равна $0{,}5 \times 20\sqrt{3} \times 10 = 100\sqrt{3}$. Таким образом, площадь, которую занимает крапива, равна $\dfrac{400\pi}{3} - 100\sqrt{3}$.

Площадь под репейником: $400\pi - \dfrac{400\pi}{3} + 100\sqrt{3} = \dfrac{800\pi}{3} + 100\sqrt{3}$.

Функция полезности козы – это функция Кобба-Дугласа. Поскольку за каждый час коза съедает одинаковое количество крапивы и репейника, то «цены» этих благ, выраженные в часах из бюджета времени козы, будут равны. Тогда условие оптимума для функции Кобба-Дугласа принимает следующий вид:

$$\frac{1}{\alpha}X = \frac{1}{1-\alpha}Y. \quad \frac{X}{Y} = \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{\dfrac{800\pi}{3} + 100\sqrt{3}}{\dfrac{400\pi}{3} - 100\sqrt{3}}.$$

Отсюда $\alpha = 0{,}8045$.

Ответ: $\alpha = 0{,}8$.

S038. Не испытывая никаких финансовых ограничений, принцесса Фухимори 24 часа в сутки ест пирожные, играет в гольф и занимается верховой ездой. Для того чтобы съесть одно пирожное, ей требуется один час. В процессе еды она не играет в гольф и не катается на лошади. Каждое пирожное принцесса должна компенсировать физической нагрузкой – получасом игры в гольф *или* тремя часами верховой езды, либо линейной комбинацией той и другой нагрузки. И наоборот, каждые полчаса игры в гольф *или* три часа верховой езды должны компенсироваться одним пирожным.

Функция полезности принцессы имеет вид: $U = XYZ$, где X – число часов игры в гольф, Y – число часов верховой езды (то и другое в сутки), Z – число пирожных, съеденных в течение суток. Сколько пирожных съест принцесса в течение суток?

Решение

Поскольку каждые полчаса игры в гольф и каждые три часа катания на лошади позволяют принцессе съесть одно пирожное, то общее число съеденных за сутки пирожных можно выразить следующим образом: $Z = \dfrac{X}{0{,}5} + \dfrac{Y}{3}$.

В сутках 24 часа, поэтому $X + Y + Z = 24$. $Z = 24 - X - Y$. $24 - X - Y = \dfrac{X}{0{,}5} + \dfrac{Y}{3}$.

$Y = 18 - 2{,}25X$. $Z = 24 - X - Y = 24 - X - (18 - 2{,}25X) = 6 + 1{,}25X$.

$U = XYZ = X \times (18 - 2{,}25X) \times (6 + 1{,}25X) = -2{,}8125X^3 + 9X^2 + 108X$.

U_{max} достигается при условии: $U' = -8{,}4375X^2 + 18X + 108 = 0$.

$$X_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{324 + 4 \cdot 8{,}4375 \cdot 108}}{-16{,}875} = \frac{-18 \pm \sqrt{3969}}{-16{,}875} = \frac{-18 \pm 63}{-16{,}875}. \qquad X = 4{,}8.$$

$Y = 18 - 2{,}25X = 7{,}2$. $Z = 24 - X - Y = 12$.

Ответ: 12 пирожных.

S039. Первобытное племя Бинго-Бонго из года в год выращивает единственную культуру – топинамбур. Для этой цели племя ежегодно изготавливает некоторое количество деревянных мотыг. Для производства мотыг, в свою очередь, племя изготавливает каменные топоры. Будем считать, что мотыги и топоры служат лишь в течение того сельскохозяйственного года, в пределах которого они были произведены.

Годовой фонд рабочего времени племени составляет 300 человеко-дней. Для изготовления одного каменного топора требуется 50 человеко-дней. Производство мотыг описывается функцией: $M = A \times L_M$, где A – количество топоров, использованное для изготовления мотыг, L_M – объем труда в человеко-днях, затраченный на изготовление мотыг. Общее количество клубней топинамбура, выращенное племенем, выражается функцией: $T = M \times L_T$, где L_T – объем труда в человеко-днях, непосредственно затраченный на выращивание топинамбура.

Какое максимальное количество клубней топинамбура сможет вырастить племя за год?

Решение

$$L_T = 300 - 50A - L_M = 300 - 50A - \frac{M}{A}.$$

$$T = M \times L_T = M\left(300 - 50A - \frac{M}{A}\right) = 300M - 50AM - \frac{M^2}{A}.$$

Максимум этой функции достигается при условии, что ее частные производные будут равны нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial M} = 300 - 50A - \dfrac{2M}{A} = 0 \\ \dfrac{\partial T}{\partial A} = -50M + \dfrac{M^2}{A^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -50 + \dfrac{M}{A^2} = 0; \quad M = 50A^2. \end{cases}$$

Подставим это значение M в первое уравнение: $300 - 50A - \dfrac{100A^2}{A} = 0.$ $A = 2.$

$M = 50A^2 = 200.$ $T = 300M - 50AM - \dfrac{M^2}{A} = 20\,000.$

Ответ: 20 000 клубней.

S040. На рынке предлагают товар две фирмы, каждая из которых имеет линейную функцию предложения. Минимальные цены предложения у этих фирм равны одному и тому же числу P_0 ($P_0 > 0$). При каждом данном значении цены, большем P_0, вторая фирма предлагает в два раза больше товара, чем первая. При некотором значении объема выпуска q эластичность общей функции предложения фирм равна 2. Определите эластичность предложения первой фирмы и эластичность предложения второй фирмы при объеме выпуска q.

Решение

На рисунке, приведенном ниже, Q_1 – функция предложения первой фирмы, Q_2 – функция предложения второй, Q – общая (суммарная) функция предложения. Если при $Q = q$ эластичность общей функции предложения равна 2, то, исходя из геометрического определения эластичности, объему q соответствует $P = 2P_0$.

При $P = 2P_0$ $Q_1 = \dfrac{q}{3}$, $Q_2 = \dfrac{2q}{3}$.

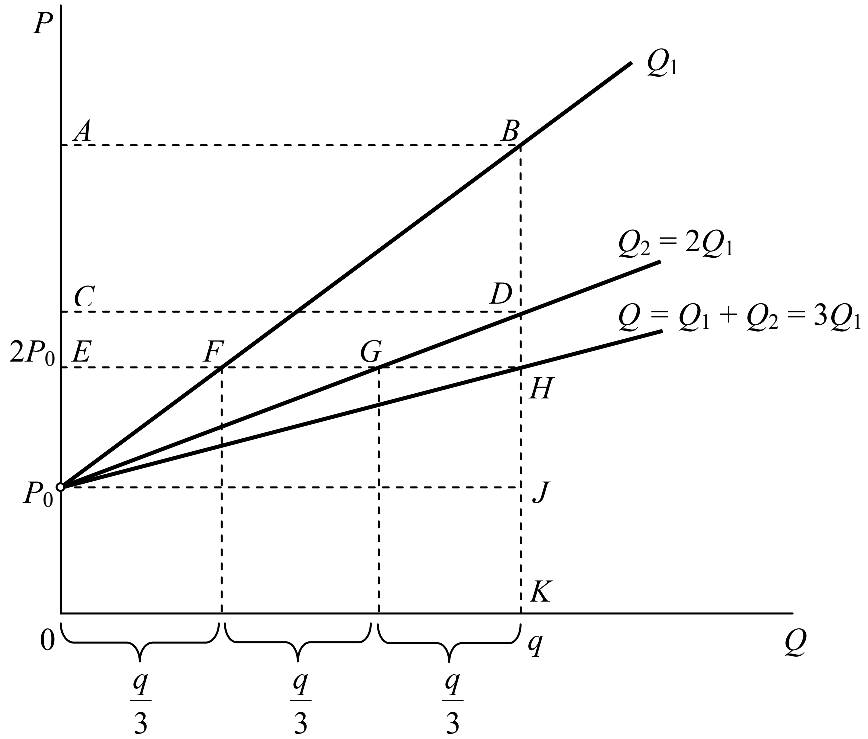
Очевидно, треугольники BFH и BP_0J подобны. Исходя из этого, $\dfrac{BH}{FH} = \dfrac{BJ}{P_0J}$.

$BJ = \dfrac{3}{2}BH.$ $(BJ) - (BH) = P_0.$ $BH = 2P_0.$

Эластичность функции Q_1 в точке B: $\varepsilon_1 = \dfrac{AO}{AP_0} = \dfrac{BK}{BJ} = \dfrac{4P_0}{3P_0} = 1\dfrac{1}{3}$.

Треугольники DGH и DP_0J также подобны. $\dfrac{DH}{GH} = \dfrac{DJ}{P_0J}$. $DJ = 3\times(DH)$.

$(DJ) - (DH) = P_0.$ $DH = 0{,}5P_0.$



Эластичность функции Q_2 в точке D: $\varepsilon_2 = \dfrac{CO}{CP_0} = \dfrac{DK}{DJ} = \dfrac{2{,}5P_0}{1{,}5P_0} = 1\dfrac{2}{3}$.

Ответ. Эластичность предложения первой фирмы: $1\dfrac{1}{3}$; эластичность предложения второй: $1\dfrac{2}{3}$.

S041. Три ценные бумаги – A, B, C – будут выкуплены эмитентами по одной и той же номинальной цене, но в разные сроки – A через год, B через два года, C через три года. Никаких промежуточных выплат по этим бумагам не предполагается. Сегодня бумага A продается с дисконтом (скидкой от номинальной цены) 3456 рублей, бумага B – с дисконтом 6336 рублей. С каким дисконтом сегодня продается бумага C?

Решение

Пусть ставка процента равна r (десятичная дробь), номинальная цена каждой из бумаг равна x. Тогда для бумаги A выполняется условие:

$x - 3456 = \dfrac{x}{1+r}$. Отсюда $1 + r = \dfrac{x}{x-3456}$. Аналогичное условие выполняется для бумаги B: $x - 6336 = \dfrac{x}{(1+r)^2} = \dfrac{x(x-3456)^2}{x^2}$. $x^2 - 6336x = (x - 3456)^2$.

$576x = 11943936$. $x = 20736$. $r = 0{,}2$.

Сегодняшняя цена бумаги C: $\dfrac{20736}{(1+0{,}2)^3} = 12000$. $20736 - 12000 = 8736$.

Ответ: 8736.

S042. На одном рынке весь товар предлагается монополистом, имеющим постоянные ненулевые предельные издержки, при этом $MC = ATC = c$, где c – некая постоянная величина.

На рынке присутствуют две группы покупателей, имеющие следующие функции спроса: $Q_1 = a_1 - P$; $Q_2 = a_2 - P$ ($a_2 > a_1$; $a_1 > 0{,}5a_2 + 0{,}5c$).

Если монополист установит единую цену для всех покупателей, то эта цена будет равна 40 рублям. Если монополист будет практиковать ценовую дискриминацию третьей степени, то вторая группа покупателей будет платить за товар 45 рублей. Какой в этом случае будет цена для первой группы покупателей?

Решение

Условия $(a_2 > a_1)$ и $(a_1 > 0{,}5a_2 + 0{,}5c)$ в этой задаче сформулированы для того, чтобы после сложения функций спроса объем, максимизирующий прибыль монополиста, находился на том участке общей функции спроса, где спрос предъявляют обе группы покупателей. Попробуйте убедиться в этом сами.

Рассмотрим ситуацию, когда монополист устанавливает единую цену. Уравнение участка общей функции спроса, где спрос предъявляют обе группы покупателей:
$Q = a_1 + a_2 - 2P$. $P = 0{,}5(a_1 + a_2) - 0{,}5Q$. $R = 0{,}5Q(a_1 + a_2) - 0{,}5Q^2$. Условие максимизации прибыли монополистом: $MR = 0{,}5(a_1 + a_2) - Q = c$.

$Q = 0{,}5(a_1 + a_2) - c$. $P = 0{,}5(a_1 + a_2) - 0{,}5\times 0{,}5(a_1 + a_2) + 0{,}5c = 0{,}25(a_1 + a_2) + 0{,}5c = 40$.
$0{,}5a_1 + 0{,}5a_2 + c = 80$ **(1)**

Если монополист устанавливает различные цены, то условие максимизации прибыли имеет вид: $MR_1 = MR_2 = MC$. $a_1 - 2Q_1 = a_2 - 2Q_2 = c$. $Q_2 = 0{,}5(a_2 - c)$.
$P_2 = a_2 - Q_2 = 0{,}5a_2 + 0{,}5c = 45$ **(2)**

$Q_1 = 0{,}5(a_1 - c)$. $P_1 = a_1 - Q_1 = 0{,}5a_1 + 0{,}5c$. Вычитая из уравнения **(1)** уравнение **(2)**, получаем: $0{,}5a_1 + 0{,}5c = 35$. Тем самым мы получили значение $P_1 = 0{,}5a_1 + 0{,}5c = 35$.

Ответ: 35.

S043. В Народной Республике Абсурдистан шляпы считаются предметом роскоши и атрибутом западного образа жизни. Поэтому однажды правительство решило обложить производителей шляп потоварным налогом. Функции спроса и предложения на рынке мужских шляп имеют вид: $Q_{Md} = 270 - P_M$; $Q_{Ms} = 1{,}5P_M$. Для женских шляп: $Q_{Wd} = 540 - 3P_W$; $Q_{Ws} = P_W$.

Чтобы не создавать дискриминации по половому признаку, правительство решило установить одинаковый налог для производителей тех и других шляп. При какой ставке потоварного налога правительство получит максимальную сумму налоговых поступлений от всех производителей шляп?

Решение

Пусть t – потоварный налог. Условие равновесия на рынке мужских шляп:
$270 - P_M = 1{,}5(P_M - t)$. $P_M = 108 + 0{,}6t$. $Q_M = 270 - P_M = 162 - 0{,}6t$. Общая сумма налоговых поступлений на рынке мужских шляп: $T_M = t\times Q_M = 162t - 0{,}6t^2$.

Условие равновесия на рынке женских шляп: $540 - 3P_W = P_W - t$. $P_W = 135 + 0{,}25t$.
$Q_W = 540 - 3P_W = 540 - 405 - 0{,}75t = 135 - 0{,}75t$. Общая сумма налоговых поступлений на рынке женских шляп: $T_W = t\times Q_W = 135t - 0{,}75t^2$.

Общая сумма налоговых поступлений на двух рынках: $T = T_M + T_W = 297t - 1{,}35t^2$.
Максимум T достигается при условии: $297 - 2{,}7t = 0$. $t = 110$.

Ответ: 110.

S044. Выработка одного рабочего в течение одной смены (q) определяется числом инструментов, которым он располагает: $q = 0{,}5\sqrt{k}$, где k – число инструментов в расчете на одного рабочего. Зарплата одного рабочего за смену равна 360 рублям, цена одного инструмента – 10 рублей. Каждый инструмент служит лишь в течение одной смены, после чего приходит в негодность. Фирма может нанять любое количество рабочих в зависимости от того, какое общее количество продукции (Q) собирается выпустить.

Сформулируйте функцию общих затрат фирмы в расчете на одну смену в виде: $TC = f(Q)$.

Решение I (Используется критерий оптимума для функции Кобба-Дугласа)

Пусть число рабочих равно L. Общее количество инструментов, которое будет использовать фирма: $K = kL$. $k = \frac{K}{L}$. Предположим, запланированный выпуск равен Q.

Очевидно, $Q = qL = 0{,}5\sqrt{k}\,L = 0{,}5\sqrt{\frac{K}{L}}\,L = 0{,}5\sqrt{KL}$. Критерий оптимума для функции Кобба-Дугласа: $\frac{1}{0{,}5}10K = \frac{1}{0{,}5}360L$. $K = 36L$. $Q = 0{,}5\sqrt{36L^2} = 3L$. $L = \frac{Q}{3}$.

$TC = 10K + 360L = 720L = 240Q$. *Ответ*. $TC = 240Q$.

Решение II (общий случай минимизации TC)

Пусть L– общее число рабочих. $L = \frac{Q}{q}$. $k = 4q^2$. $TC = 10kL + 360L = 40q^2\frac{Q}{q} + 360\frac{Q}{q}$.
При некотором заданном (принятом за постоянную величину) объеме выпуска Q общие затраты определяются только выработкой рабочего q. Дифференцируя TC по q, мы определим, какой должна быть величина q для того, чтобы TC были минимальными при каждом данном значении Q.

$TC' = 40Q - \frac{360Q}{q^2} = 0$. $q = 3$. $TC = 40q^2\frac{Q}{q} + 360\frac{Q}{q} = 120Q + 120Q = 240Q$.

Ответ. $TC = 240Q$.

S045. Функция полезности индивида: $U = X^2Y$, где X – объем товара X, Y – объем товара Y. Бюджет потребителя $I = 300\,000$ денежных единиц. Цены товаров: $P_X = 20$, $P_Y = 100$. Разумеется, потребитель может свободно распределять деньги на приобретение продуктов X и Y. Но за каждую купленную за деньги *пару продуктов* X и Y потребитель получает в подарок одну единицу продукта X.

Сколько всего единиц продуктов X и Y поступит в распоряжение потребителя, если он будет максимизировать общую полезность получаемого набора благ?

Решение

Пусть X_m – объем продукта X, купленный за деньги, X_p – объем продукта X, полученный в подарок. Общий объем продукта X: $X = X_m + X_p$. Придется рассмотреть три варианта: 1) $X_m > Y$; 2) $X_m < Y$; 3) $X_m = Y$.

1) $X_m > Y$. Разумеется, это предположение наиболее правдоподобно. Учитывая, что $P_Y > P_X$, а также то, что показатель степени при X в функции Кобба-Дугласа в два раза больше, чем при Y, можно предположить, что за деньги будет куплено больше единиц X, чем Y. Исходя из нашего предположения, все единицы Y будут куплены в паре с единицами X. Пусть Z – число пар, а $(X_m - Y)$ – число единиц X, купленных вне пар.

Тогда общее количество товара X будет определяться формулой:
$X = Z + (X_m - Y) + X_p = Z + (X_m - Y) + Z$. Последнее Z в этой формуле означает число единиц товара X, полученных в подарок за каждую пару X и Y, купленную за деньги. Общее количество товара Y, приобретенное индивидом: $Y = Z$.

Бюджетное ограничение:
$300\,000 = 20(X_m - Y) + (20 + 100)Z = 20(X_m - Z) + (20 + 100)Z$. $X_m = 15000 - 5Z$.
$U = X^2Y = (X_m + Z)^2 Z = (15000 - 5Z + Z)^2 Z = (15000 - 4Z)^2 Z =$
$= 16Z^3 - 120000Z^2 + 225\,000\,000\,Z$. $U' = 48Z^2 - 240000Z + 225\,000\,000 = 0$.
$Z^2 - 5000Z + 4\,687\,500 = 0$. $Z_1 = 3750$ (не подходит, так как индивид не сможет на свой бюджет купить 3750 пар X и Y). $Z_2 = 1250$.

Докажем, что при $Z = 1250$ достигается максимум функции U. $U'' = 96Z - 240000$. При $Z = 1250$ $U'' = -120000$. Вторая производная отрицательна. Это значит, что мы получили максимум.

$X_m = 15000 - 5Z = 8750$. Общий объем X, полученный индивидом: $X = X_m + Z = 8750 + 1250 = 10000$. Общий объем Y: $Y = Z = 1250$.

$U = X^2Y = 12{,}5\times10^{10}$.

2) $X_m < Y$. Пусть Z – число пар, а $(Y - X_m)$ – число единиц Y, купленных вне пар. Общее количество товара X, полученное индивидом: $X = X_m + Z = 2Z$.

Бюджетное ограничение:
$300\,000 = 100(Y - X_m) + (20 + 100)Z = 100(Y - Z) + (20 + 100)Z = 100Y + 20Z$.
$Y = 3000 - 0{,}2Z$. $U = X^2Y = (2Z)^2(3000 - 0{,}2Z) = 12000Z^2 - 0{,}8Z^3$. $U' = 24000Z - 2{,}4Z^2 = 0$.
$Z_1 = 0$, $Z_2 = 10\,000$. Оба ответа не удовлетворяют условиям задачи.

3) $X_m = Y$. Очевидно, в этом случае $X_m = Y = Z$. Общее количество товара X, полученное индивидом: $X = X_m + Z = 2Z$. Бюджетное ограничение:
$300\,000 = 20X_m + 100Y = 120Z$. $Z = X_m = Y = 2500$.

$U = X^2Y = (2\times2500)^2\times2500 = 6{,}25\times10^{10}$. Это меньше, чем в первом случае. Поэтому принимаем следующие значения: $X = 10\,000$, $Y = 1250$.

Ответ. $X = 10\,000$, $Y = 1250$.

S046. В одном социуме существуют две равные по численности группы населения. Внутри каждой группы доход распределен равномерно, при этом доход каждого представителя второй группы выше, чем доход любого представителя первой группы. Функции полезности первой и второй групп в расчете на год имеют вид: $U_1 = X_1Y_1$; $U_2 = X_2Y_2^5$ (X_1, X_2 – объемы потребления блага X; Y_1, Y_2 – объемы потребления блага Y). Годовой объем потребления блага X в социуме (то есть обеими группами, вместе взятыми) составляет 1500 единиц, блага Y – 875 единиц. Коэффициент Джини в социуме равен 0,1.

Определите, сколько единиц каждого блага потребляет в течение года каждая группа населения.

Решение

Критерии оптимума для функций полезности Кобба-Дугласа:

$P_X X_1 = P_Y Y_1$ (для первой группы); $P_X X_2 = \dfrac{1}{5} P_Y Y_2$ (для второй группы).

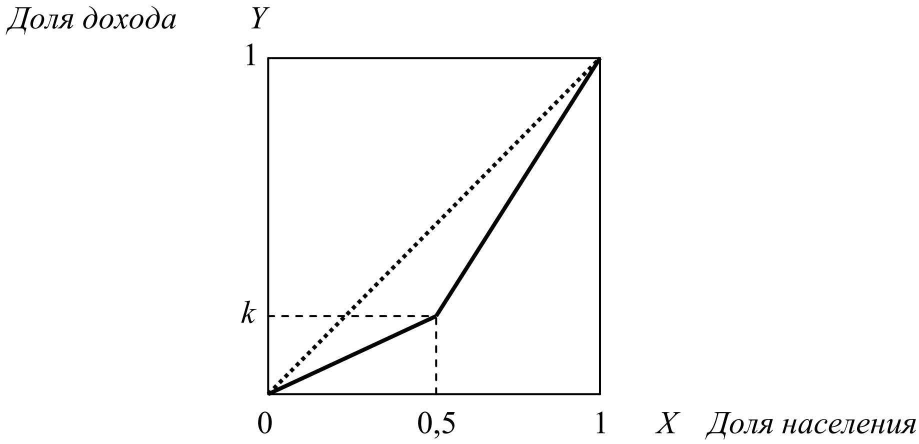
Поделив первое из этих уравнений на второе, получим: $\dfrac{X_1}{X_2} = \dfrac{5Y_1}{Y_2}$ **(1)**

Кроме того, из первого уравнения следует, что $Y_1 = \dfrac{P_X}{P_Y}X_1$. Как мы знаем, $X_1 + X_2 = 1500$; $Y_1 + Y_2 = 875$. Отсюда $X_2 = 1500 - X_1$; $Y_2 = 875 - Y_1 = 875 - \dfrac{P_X}{P_Y}X_1$. Учитывая это, перепишем следующим образом уравнение **(1)**:

$$\frac{X_1}{1500 - X_1} = \frac{5\dfrac{P_X}{P_Y}X_1}{875 - \dfrac{P_X}{P_Y}X_1}.$$

$X_1 = 1875 - 218{,}75\dfrac{P_Y}{P_X}$ **(2)**

Пусть k – это доля первой группы (получающей меньший доход) в общем доходе социума. $k = \dfrac{I_1}{I_1 + I_2}$, где I_1 – доход первой группы, I_2 – доход второй группы. Тогда кривая Лоренца для рассматриваемой страны имеет следующий вид:



Коэффициент Джини $G = \dfrac{0{,}5 - \dfrac{0{,}5k}{2} - \dfrac{k+1}{2} \times 0{,}5}{0{,}5} = 0{,}5 - k$. По условию $G = 0{,}1$.

Значит, $k = \dfrac{I_1}{I_1 + I_2} = 0{,}4$. Отсюда $0{,}6\, I_1 - 0{,}4\, I_2 = 0$ **(3)**

$I_1 = P_X X_1 + P_Y Y_1 = P_X X_1 + P_Y \dfrac{P_X}{P_Y} X_1 = 2\, P_X X_1$ **(4)**

$I_2 = P_X X_2 + P_Y Y_2 = P_X (1500 - X_1) + P_Y \left(875 - \dfrac{P_X}{P_Y} X_1\right) = 1500 P_X + 875 P_Y - 2 P_X X_1$ **(5)**

Подставив данные из уравнений **(2)**, **(4)** и **(5)** в уравнение **(3)**, получим:

$0{,}6 \times 2\, P_X X_1 - 0{,}4 \times (1500 P_X + 875 P_Y - 2 P_X X_1) = 0$. $2\, P_X X_1 - 600 P_X - 350 P_Y = 0$.

$2\, P_X \left(1875 - 218{,}75 \dfrac{P_Y}{P_X}\right) - 600 P_X - 350 P_Y = 0$. $3150\, P_X - 787{,}5\, P_Y = 0$. $P_Y = 4\, P_X$.

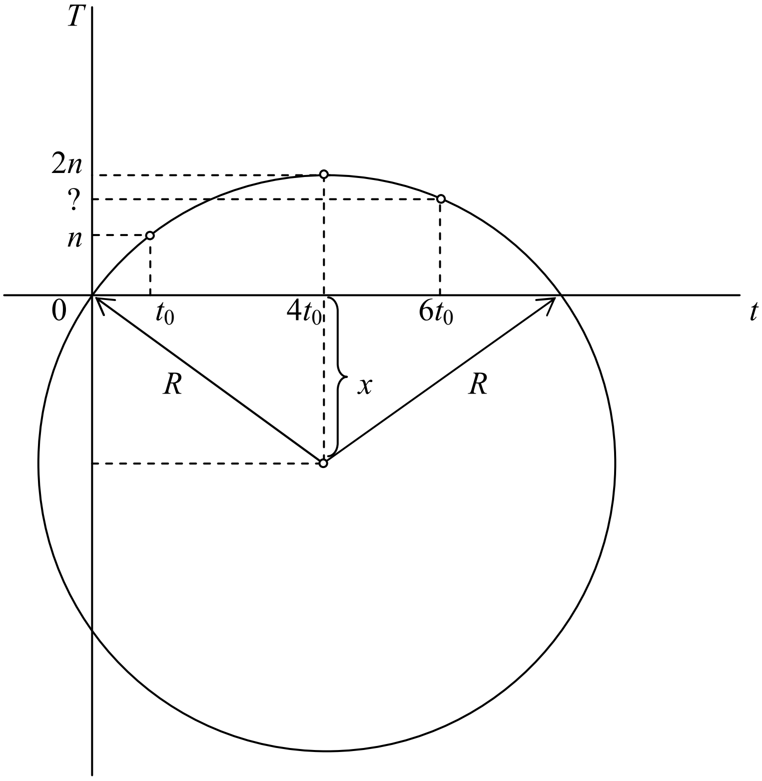
$X_1 = 1875 - 218{,}75 \dfrac{P_Y}{P_X} = 1000$. $Y_1 = \dfrac{P_X}{P_Y} X_1 = 250$. $X_2 = 1500 - X_1 = 500$. $Y_2 = 875 - Y_1 = 625$.

Ответ. Первая группа потребляет 1000 единиц блага X и 250 единиц блага Y, вторая группа – 500 единиц блага X и 625 единиц блага Y.

S047. В одной стране кривая Лаффера для налога на прибыль корпораций представляет собой участок окружности. Однажды парламентарии решили увеличить ставку налога на прибыль в 5 раз. Министр финансов попытался объяснить им, что не стоит этого делать, так как максимальный прирост доходов бюджета – в 2 раза – возможен лишь при увеличении ставки налога по сравнению с существующей в 4 раза. Однако парламентарии не послушали его и после продолжительных дебатов увеличили ставку налога даже не в пять, а в 6 раз. На сколько процентов выросли доходы бюджета после такого решения парламентариев?

Решение

Пусть t – ставка налога, T – общая сумма поступлений в бюджет (т.е. t и T – переменные, образующие кривую Лаффера), n – существующий объем поступлений в бюджет, t_0 – существующая ставка налога. Очевидно, при $t = 0$ $T = 0$; при $t = t_0$ $T = n$; при $t = 4\,t_0$ $T = 2\,n$. Исходя из этого, построим график кривой. Величина x нам пока неизвестна.



Исходя из принятых нами обозначений, уравнение окружности можно записать следующим образом: $(T + x)^2 + (t - 4\,t_0)^2 = R^2$.

Поскольку при $t = 0$ $T = 0$, верно равенство $x^2 + 16\,t_0^{\,2} = R^2$.

При $t = t_0$ $T = n$, поэтому $(n + x)^2 + 9\,t_0^{\,2} = R^2 = x^2 + 16\,t_0^{\,2}$. Преобразуя, получим: $7\,t_0^{\,2} - n^2 - 2nx = 0$ **(1)**.

При $t = 4\,t_0$ $T = 2n$, следовательно, $(2n + x)^2 + (4\,t_0 - 4\,t_0)^2 = R^2 = x^2 + 16\,t_0^{\,2}$. $4\,n^2 + 4\,nx + x^2 = x^2 + 16\,t_0^{\,2}$. $nx = 4\,t_0^{\,2} - n^2$.

Подставим это значение nx в уравнение **(1)**. Получим равенство $n = t_0$. Тогда $nx = 4\,n^2 - n^2$. $x = 3\,n = 3\,t_0$. $R^2 = 9\,t_0^{\,2} + 16\,t_0^{\,2} = 25\,t_0^{\,2}$.

Уравнение окружности приобретает следующий вид: $(T + 3\,t_0)^2 + (t - 4\,t_0)^2 = 25\,t_0^{\,2}$. Определим объем поступлений в бюджет при установленной парламентариями ставке налога $t = 6\,t_0$: $(T + 3\,t_0)^2 + (6\,t_0 - 4\,t_0)^2 = 25\,t_0^{\,2}$. $T^2 + 6\,t_0T - 12\,t_0^{\,2} = 0$. Решая уравнение, получим: $T = 1{,}58\,t_0 = 1{,}58\,n$. Это означает, что доходы бюджета по сравнению с первоначальным уровнем вырастут лишь на 58%.

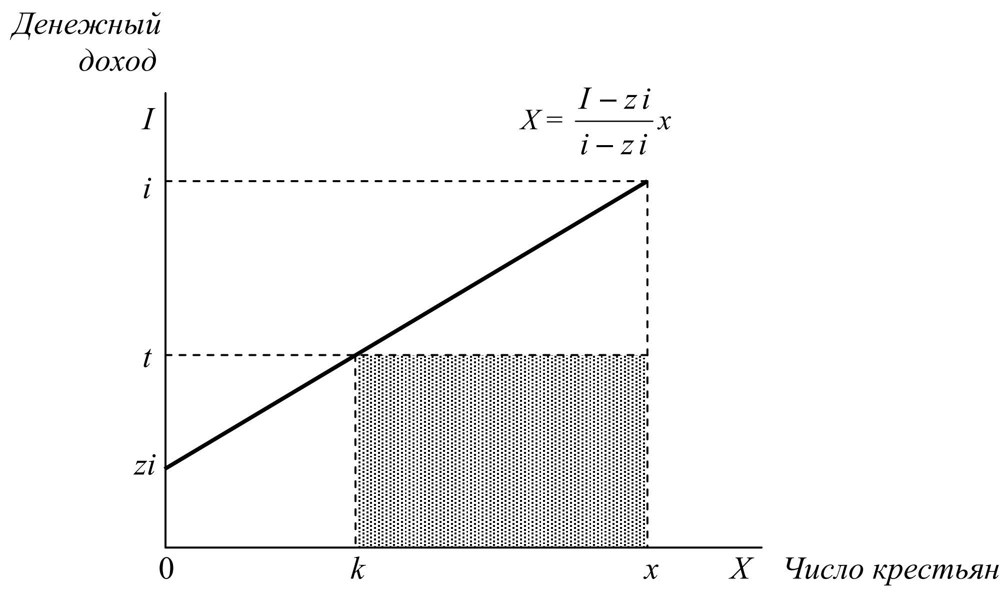
Ответ: на 58%.

S048. Все крестьяне одной небольшой страны заняты в основном натуральным хозяйством. На рынке за деньги они продают только излишки своего производства. Если всех крестьян расположить в порядке возрастания их денежного дохода, получаемого от продажи продуктов на рынке, то по мере увеличения порядкового номера крестьянина денежный доход будет изменяться линейно. Однажды государство установило для всех крестьян, продающих часть своего продукта на рынке, налог в размере t денежных единиц. Причем величина t была выбрана таким образом, чтобы максимизировать налоговые поступления. Как оказалось, этот налог платят только 62,5% крестьян, т.е. только те, кто получают от продажи своих излишков денежный доход, превышающий величину t. Все остальные отказались продавать что-либо на рынке и предпочли заниматься только натуральным хозяйством.

Определите, во сколько раз денежный доход самого богатого крестьянина *до введения налога* превосходил денежный доход самого бедного крестьянина.

Решение

Пусть до введения налога: i – это денежный доход самого богатого крестьянина, zi – денежный доход самого бедного ($0 < z < 1$), x – общее число крестьян, продававших свои излишки на рынке.



Мы знаем, что налог платят не все крестьяне. Это значит, что размер налога находится в интервале: $zi < t < i$. На приведенном рисунке показана линейная зависимость между порядковым номером крестьянина X и величиной его дохода I. Эта зависимость может быть выражена уравнением: $X = \frac{I - zi}{i - zi}x$.

Пусть при размере налога t его не платят k крестьян. В этом случае $k = \frac{t - zi}{i - zi}x$.

Число крестьян, которые платят налог: $x - k = x - \frac{t - zi}{i - zi}x = x\left(1 - \frac{t - zi}{i - zi}\right)$. Общая сумма налоговых поступлений (закрашенная фигура на графике): $t\,(x - k) = x\left(t - \frac{t^2 - zit}{i - zi}\right)$.

Максимум налоговых поступлений достигается при условии: $1 - \frac{2t - zi}{i - zi} = 0$.

$2t - zi = i - zi$. $t = 0{,}5i$.

Из условия мы знаем, что $k = (1 - 0{,}625)\,x$. $(1 - 0{,}625)\,x = \frac{t - zi}{i - zi}x$.

$0{,}375 = \frac{0{,}5i - zi}{i - zi}$. $z = 0{,}2$.

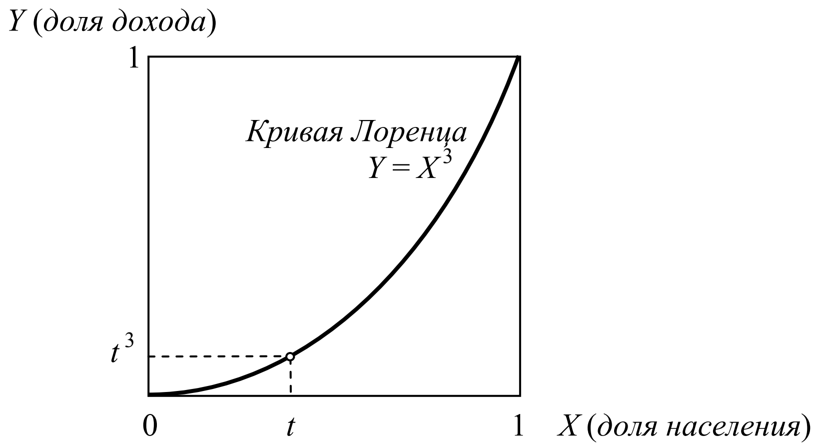
Ответ: в 5 раз.

S049. На планете Плюк каким-то образом сосуществуют две категории населения – господствующее большинство – чатлане и дискриминируемое меньшинство – пацаки. Доход самого бедного чатланина равен доходу самого богатого пацака. Средний доход чатлан в 21 раз превышает средний доход пацаков. Уравнение кривой Лоренца на этой планете имеет вид: $Y = X^3$, где Y – доля дохода, X – доля получателей дохода ($0 \le Y \le 1$, $0 \le X \le 1$).

Определите, сколько процентов населения планеты составляют чатлане и сколько процентов – пацаки.

Решение

Пусть t – доля пацаков в общей численности населения ($0 \le t \le 1$). Поскольку нет ни одного пацака, который был бы богаче хотя бы какого-нибудь чатланина, то доля пацаков в численности населения может быть отмечена точкой t на оси OX. Доля дохода всех пацаков, очевидно, будет равна t^3. В этом случае доля чатлан в общей численности населения равна $1 - t$, а их доля в общем доходе составляет $1 - t^3$.



Соотношение средних доходов чатлан и пацаков можно выразить следующим образом:

$$\frac{1-t^3}{1-t} = 21\ \frac{t^3}{t}; \qquad \frac{1-t+t-t^2+t^2-t^3}{1-t} = 21\ t^2. \qquad \frac{(1-t)+t(1-t)+t^2(1-t)}{1-t} = 21\ t^2.$$

$1 + t + t^2 = 21\ t^2$. $\quad 20\ t^2 - t - 1 = 0$.

Единственное решение уравнения, имеющее смысл: $t = 0{,}25$.

Ответ: чатлане – 75%, пацаки – 25%.

S050. Некая производственная система имеет запас капитала $K = 10$ и запас труда $L = 10$. При этом могут производиться два продукта: X и Y. Объем выпуска X определяется функцией $X = KL$. Объем выпуска Y определяется такой же функцией: $Y = KL$. Сформулируйте уравнение кривой производственных возможностей для данной системы в виде: $Y = f(X)$.

Решение

Пусть K_X и L_X – объемы капитала и труда, используемые для производства продукта X, аналогично K_Y и L_Y – объемы капитала и труда, используемые для производства Y. Тогда производственные функции можно записать в следующем виде: $X = K_X L_X$, $Y = K_Y L_Y$.

Очевидно, $K_X + K_Y = 10$; $L_X + L_Y = 10$. $K_Y = 10 - K_X$; $L_Y = 10 - L_X = 10 - \dfrac{X}{K_X}$;

$$Y = K_Y L_Y = (10 - K_X)\left(10 - \frac{X}{K_X}\right) = 100 - \frac{10X}{K_X} - 10K_X + X.$$

Кривая производственных возможностей – это график, показывающий, какой максимальный объем продукта Y может быть произведен при *данном* значении объема производства X. Предположим, мы выбрали какое-то определенное (фиксированное, неизменное) значение X. Очевидно, объем выпуска Y в данном случае будет определяться лишь тем объемом капитала K_X, который будет использован для производства продукта X. Определим значение K_X, при котором достигается максимальное значение Y.

$$Y' = \frac{10X}{K_X^2} - 10 = 0. \quad K_X = \sqrt{X}.$$

Снова подставим найденное значение K_X в производственную функцию для Y:

$$Y = (10 - K_X)\left(10 - \frac{X}{K_X}\right) = (10 - \sqrt{X})\left(10 - \frac{X}{\sqrt{X}}\right) = (10 - \sqrt{X})^2.$$

Ответ: $Y = (10 - \sqrt{X})^2$.

S051. На одном альпийском курорте ежегодно устраивается праздник блинов. В течение праздника на одной сковородке можно испечь 1000 блинов (если работать в непрерывном режиме). Один частный предприниматель, желающий подзаработать во время праздника, имеет в наличии 460 франков. Эти деньги он может потратить на приобретение сковородок (одна сковородка стоит 15 франков) и наём пекарей. Будем считать для простоты, что сковородка служит только в течение праздника, после чего приходит в негодность и выбрасывается.

Живущие на курорте пекари имеют различную квалификацию. Квалификация пекаря определяется тем, сколько одновременно работающих сковородок (обозначим эту величину как x) он может обслуживать. Соответственно зарплата, которую запрашивает каждый пекарь, равна: $w = 16 + x^2$.

Какое максимальное количество блинов сможет произвести и продать частный предприниматель?

Решение

Функция затрат предпринимателя: $TC = rK + wL$. $L = \dfrac{K}{x}$.

$$460 = 15 \times K + (16 + x^2) \times \frac{K}{x}. \qquad Q = 1000K = 1000 \times \frac{460}{15 + \dfrac{16 + x^2}{x}}.$$

Q_{max} достигается при условии: $$\left(\frac{1}{15 + \dfrac{16 + x^2}{x}}\right)' = \frac{-1 \times \dfrac{2x^2 - 16 - x^2}{x^2}}{\left(15 + \dfrac{16 + x^2}{x}\right)^2} = 0. \quad x^2 = 16.$$

$$x = 4. \qquad Q = \frac{460\ 000}{23} = 20000.$$

Ответ: 20 000.

S052. Две бригады строителей должны построить железнодорожный тоннель длиной 5000 метров. Согласно технологическим требованиям, которые изменить нельзя, строительство тоннеля должно быть начато одновременно с двух концов. Пусть число строителей в первой бригаде равно L_1, во второй – L_2. За один день первая бригада может построить $1^1/_3\sqrt{L_1}$ метров тоннеля. Вторая бригада, имеющая менее благоприятные условия для работы, за один день может построить $\sqrt{L_2}$ метров тоннеля. Тоннель должен быть построен за 300 дней.

При какой минимальной общей численности строителей $(L_1 + L_2)$ тоннель может быть закончен в срок? Сколько строителей должно быть при этом в первой бригаде и сколько – во второй?

Решение

$300\times(1^1/_3\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2}) = 5000.$ $\sqrt{L_2} = \dfrac{50}{3} - \dfrac{4}{3}\sqrt{L_1}.$ $L_2 = \left(\dfrac{50}{3} - \dfrac{4}{3}\sqrt{L_1}\right)^2.$

$L = L_1 + L_2 = L_1 + \left(\dfrac{50}{3} - \dfrac{4}{3}\sqrt{L_1}\right)^2.$ $L' = 1 - 2\times\left(\dfrac{50}{3} - \dfrac{4}{3}\sqrt{L_1}\right)\times\dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{2\sqrt{L_1}} = 0.$

Ответ. $L_1 = 64.$ $L_2 = 36.$ $L = 100.$

S053. Две фирмы имеют одинаковые функции предельных издержек. График каждой из них представляет собой прямую линию, выходящую из начала координат. Функция спроса также линейна. Когда фирмы конкурировали между собой, эластичность спроса при равновесном значении объема была равна (– 0,5). Затем фирмы объединились в картель, то есть образовали монополию с двумя заводами. При каком значении эластичности спроса достигается оптимум такой монополии?

Решение

В задаче не даны какие-либо конкретные значения цены и объема, поэтому мы можем выбрать для их измерения такие единицы, при которых линейная функция спроса принимает вид: $Q_d = 1 - P$. Функцию предельных издержек каждой фирмы можно представить в виде: $MC = cQ$.

Функцию предложения каждой фирмы можно вывести из условия: $MC = P$. $cQ = P$. $Q = P / c$. Общая функция предложения двух фирм будет иметь вид: $Q_s = 2P / c$. $Q_d = Q_s$.

$1 - P = 2P / c.$ $P = \dfrac{1}{\dfrac{2}{c}+1}.$ $Q = \dfrac{2P}{c} = \dfrac{2}{2+c}.$

Численное значение эластичности спроса в точке равновесия будет равно отношению двух отрезков на оси OQ (взятому с отрицательным знаком): $\left(1 - \dfrac{2}{2+c}\right)$ и $\dfrac{2}{2+c}$.

$\varepsilon_P = -\left(1 - \dfrac{2}{2+c}\right) : \dfrac{2}{2+c} = -\,0{,}5c.$ По условию $\varepsilon_P = -\,0{,}5$, поэтому $c = 1$. То есть функции предельных издержек фирм можно представить как $MC_1 = Q_1$ и $MC_2 = Q_2$.

Если фирмы объединились в монополию с двумя заводами, то условие максимизации прибыли будет следующим: $MC_1 = MC_2 = MR$. $MR = [(1 - Q)Q]' = 1 - 2Q = 1 - 2(Q_1 + Q_2)$. $Q_1 = Q_2 = 1 - 2(Q_1 + Q_2)$. Отсюда $Q_1 = Q_2 = 0{,}2$. $Q_1 + Q_2 = 0{,}4$. Численное значение эластичности спроса в точке оптимума будет равно отношению двух отрезков:
$\varepsilon_P = -\,(1 - 0{,}4) : 0{,}4 = -\,1{,}5.$

Ответ: $-\,1{,}5$.

S054. Однажды Робинзон Крузо, не подумав о последствиях, рассказал Пятнице о том, как функционирует капиталистическая экономика. После этого Пятница заявил, что отныне будет работать только за деньги, желательно американские доллары. Если верить Пятнице, его функция полезности имеет вид: $U = XY^w$, где X – число часов в сутки, свободных от работы, Y – число часов работы в сутки, w – почасовая заработная плата. При этом величины X и Y Пятница выбирает сам, а величина w является экзогенной, поскольку задается рынком труда (в данном случае – Робинзоном) и от Пятницы не зависит. Робинзон решил использовать Пятницу в качестве наемного работника на заготовке тропических бабочек для последующей продажи энтомологам и коллекционерам по $3 за штуку. Пятница в среднем ловит одну бабочку в час.

Предположим, Робинзон максимизирует дневную прибыль. Какую почасовую оплату (w) он установит для Пятницы? Сколько часов в день (Y) Пятница будет работать?

Решение

Используя функцию полезности Пятницы, сформулируем его функцию предложения труда. Очевидно, $X + Y = 24$. $X = 24 - Y$. $U = (24 - Y)\, Y^w$. U_{max} достигается при условии: $U' = -Y^w + w\,(24 - Y)\, Y^{w-1} = 0$. $-Y + 24w - Yw = 0$.

Функция предложения труда со стороны Пятницы: $Y = \dfrac{24w}{w+1}$.

Дневная прибыль Робинзона: $\pi = 3Y - wY = \dfrac{24w}{w+1} \cdot (3 - w) = \dfrac{72w - 24w^2}{w+1}$.

Максимум прибыли достигается при условии:

$$\pi' = \frac{(72 - 48w)(w+1) - (72w - 24w^2)}{(w+1)^2} = 0. \qquad 72w + 72 - 48w^2 - 48w - 72w + 24w^2 = 0.$$

$w^2 + 2w - 3 = 0$. $w_1 = 1$, $w_2 = -3$ (не подходит по условиям задачи). $Y = \dfrac{24w}{w+1} = \dfrac{24}{2} = 12$.

Ответ. $w = 1$, $Y = 12$.

S055. Один монополист попросил одного профессора экономики провести маркетинговое исследование на его рынке. После проведения исследования профессор сообщил, что функция спроса на рынке монополиста является линейной, при этом предельные издержки монополиста постоянны и равны 1. Более того, они равны средним общим издержкам, при этом постоянные издержки равны нулю.

Монополист ответил, что всё это для него – высоконаучная абракадабра. Его, монополиста, больше всего интересует прибыль. В ответ профессор сказал, что в случае, если монополист выберет такой объем выпуска, при котором эластичность выручки по объему спроса равна эластичности объема спроса по цене, прибыль будет равна нулю.

Монополист окончательно расстроился. Он сказал, что ему не нужна нулевая прибыль, и ушел. Профессор так и не успел ему сказать, что в случае, если монополист выберет такой объем выпуска, при котором эластичность объема спроса по цене равна эластичности цены по объему спроса, будет получена прибыль в размере 1000 денежных единиц.

Определите, какой объем выпуска должен выбрать монополист для того, чтобы получить максимальную прибыль.

Решение

Пусть функция спроса имеет вид: $Q = a - bP$ $(a, b > 0)$. Обратная функция спроса: $P = \dfrac{a - Q}{b}$. Выручка $R = PQ = \dfrac{aQ - Q^2}{b}$.

Эластичность выручки по объему спроса $\varepsilon_{R,Q} = (R)'\dfrac{Q}{R} = \dfrac{a-2Q}{b} \times \dfrac{bQ}{aQ - Q^2} = \dfrac{a-2Q}{a-Q}$.

Эластичность объема спроса по цене $\varepsilon_{Q,P} = \dfrac{Q-a}{Q}$.

Если $\varepsilon_{R,Q} = \varepsilon_{Q,P}$, то $\dfrac{a-2Q}{a-Q} = \dfrac{Q-a}{Q}$ **(1)**.

По условию задачи в случае, если $\varepsilon_{R,Q} = \varepsilon_{Q,P}$, прибыль равна нулю. Прибыль $\pi = R - TC = \dfrac{aQ - Q^2}{b} - Q \times 1 = 0$. $a - Q - b = 0$. $Q = a - b$. Подставляя это выражение для Q в **(1)**, получаем: $\dfrac{a-2(a-b)}{a-(a-b)} = \dfrac{a-b-a}{a-b}$. $\dfrac{-a+2b}{b} = \dfrac{-b}{a-b}$.

$(-a + 2b)(a - b) = -b^2$. $a^2 - 3ab + b^2 = 0$.

$a_{1,2} = \dfrac{+3b \pm \sqrt{9b^2 - 4b^2}}{2} = \dfrac{+3b \pm b\sqrt{5}}{2} = b\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. $a_1 = b\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, $a_2 = b\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Как мы уже отмечали, эластичность объема спроса по цене $\varepsilon_{Q,P} = \dfrac{Q-a}{Q}$. Эластичность цены по объему спроса – величина обратная, т.е. $\varepsilon_{P,Q} = \dfrac{Q}{Q-a}$. Если $\varepsilon_{Q,P} = \varepsilon_{P,Q}$, то $\dfrac{Q-a}{Q} = \dfrac{Q}{Q-a}$. $(Q-a)^2 = Q^2$. $Q^2 - 2aQ + a^2 = Q^2$. $Q = 0{,}5a$ **(2)**.

По условию задачи в случае, если $\varepsilon_{Q,P} = \varepsilon_{P,Q}$, то прибыль равна 1000.

$\pi = R - TC = \dfrac{aQ - Q^2}{b} - Q \times 1 = 1000$. Подставляя **(2)** в это выражение для прибыли, получаем: $\dfrac{0{,}5a^2 - 0{,}25a^2}{b} - 0{,}5a = 1000$. $\dfrac{0{,}25a^2}{b} - 0{,}5a = 1000$ **(3)**.

Подставим сначала в **(3)** значение $a_1 = b\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. $0{,}25b\dfrac{(3+\sqrt{5})^2}{4} - 0{,}5b\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = 1000$. $b(3+\sqrt{5})^2 - 4b(3+\sqrt{5}) = 16\,000$. $b(2+2\sqrt{5}) = 16\,000$. $b = \dfrac{8000}{1+\sqrt{5}}$.

Подставим в **(3)** значение $a_2 = b\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. $b(3-\sqrt{5})^2 - 4b(3-\sqrt{5}) = 16\,000$.

$b(2-2\sqrt{5}) = 16\,000$. $b = \dfrac{8000}{1-\sqrt{5}} < 0$. Это противоречит принятому нами условию, согласно которому $b > 0$. Поэтому принимаем для b предыдущее значение, которое соответствует a_1, т.е. $b = \dfrac{8000}{1+\sqrt{5}}$.

$$a = b\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{8000}{1+\sqrt{5}} \times \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{4000\,(3+\sqrt{5})}{1+\sqrt{5}} = \frac{4000\,(3+\sqrt{5})\,(3-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})\,(3-\sqrt{5})} = \frac{8000}{\sqrt{5}-1}.$$

Теперь определим, при каком значении Q достигается максимальная прибыль. π_{max} достигается при условии: $\pi' = 0$.

Для нашего монополиста $\pi = R - TC = \dfrac{aQ - Q^2}{b} - Q \times 1$.

$\pi' = \dfrac{a-2Q}{b} - 1 = 0.\quad a - 2Q - b = 0.\quad Q = 0{,}5(a-b) = 0{,}5\left(\dfrac{8000}{\sqrt{5}-1} - \dfrac{8000}{1+\sqrt{5}}\right) =$

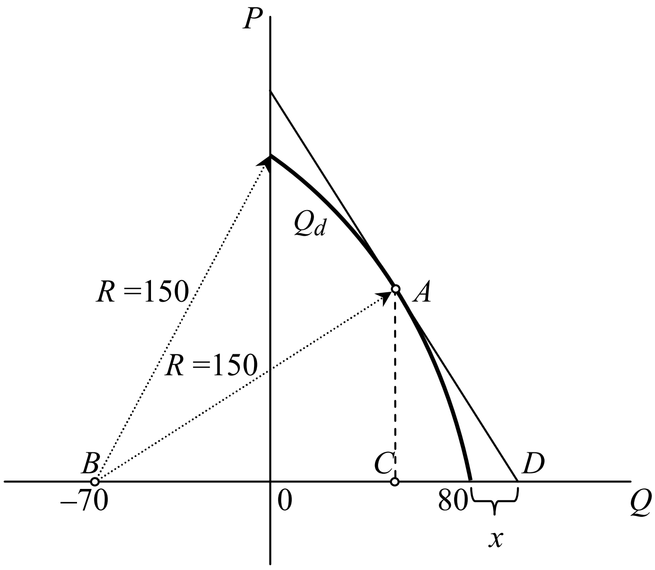
$= 0{,}5\dfrac{8000\,(\sqrt{5}+1) - 8000(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}-1)\,(\sqrt{5}+1)} = 0{,}5\dfrac{16\,000}{5-1} = 2000.$

Ответ. Максимальная прибыль достигается при $Q = 2000$.

S056. График функции спроса представляет собой часть окружности, центр которой находится где-то на горизонтальной оси левее начала координат. При $Q_1 = 20$ общая выручка продавцов равна 2400, при $Q_2 = 50$ общая выручка равна 4500. При каком объеме выпуска достигается максимальная выручка?

Решение

При $Q_1 = 20$ $P_1 = 120$, при $Q_2 = 50$ $P_2 = 90$. Пусть окружность, описанная в условии, имеет радиус R и центр ее находится на расстоянии f от начала координат. Тогда указанная окружность имеет уравнение: $P^2 + (Q+f)^2 = R^2$. Исходные данные позволяют составить два уравнения: $R^2 = 120^2 + (20+f)^2 = 90^2 + (50+f)^2$. Отсюда $f = 70$, $R = 150$.



Максимальная выручка достигается при эластичности спроса, равной (–1). Если AD – это касательная к кривой спроса в точке A, где достигается эластичность $\varepsilon = -1$, то, исходя из геометрического определения эластичности, $OC = CD$.

Тогда $CD = 0{,}5\times(80+x)$. $AD = = \sqrt{(150+x)^2 - 150^2} = \sqrt{x^2 + 300x}$.

Легко доказать, что треугольники ABD и ACD подобны. Исходя из этого,

$\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{AD}{CD};\quad \dfrac{150+x}{\sqrt{x^2+300x}} = \dfrac{\sqrt{x^2+300x}}{0{,}5\times(80+x)}.\qquad 0{,}5x^2 + 185x - 6000 = 0.\qquad x = 30.$

$OC = CD = 0{,}5\times(80+x) = 55.$

Ответ: 55.

S057. Все покупатели одной страны расходуют весь свой доход на два продукта: ветчину и хлеб. Функция спроса на ветчину в расчете на год имеет вид: $Q_d = a - P$. Функция предложения ветчины в расчете на год: $Q_s = P$. Все деньги, которые остались после приобретения ветчины, покупатели тратят на хлеб. Хлеб всегда продается по одной и той же государственной цене. Все покупатели из года в год получают один и тот же денежный доход.

Однажды в парламенте представитель фракции, лоббирующей интересы производителей ветчины, предложил установить для покупателей ветчины потоварную субсидию из государственного бюджета в размере 11 денежных единиц (в расчете на единицу веса), мотивируя это тем, что в результате этой стимулирующей меры в следующем году значительно возрастет реальный доход населения. Против этой меры решительно выступил член партии радикальных вегетарианцев. Он заявил, что его партия против того, чтобы любители холестерина объедались ветчиной за счет государства. А для увеличения реальных доходов населения партия вегетарианцев предлагает другую меру, которая, кстати, никак не обременит государственный бюджет. Точно такой же (как и в случае введения субсидии на ветчину) рост реальных доходов может быть обеспечен, если обложить производителей ветчины потоварным налогом в размере 13 денежных единиц – при условии, что вся сумма налоговых поступлений будет выдана населению в качестве субсидии на приобретение хлеба.

Задание: сформулируйте уравнение функции спроса (другими словами, определите параметр a).

Решение

Если нет никаких налогов и субсидий, равновесная цена $P_0 = 0{,}5a$, равновесный доход $Q_0 = 0{,}5a$.

Если введена субсидия для покупателей, функция спроса приобретает вид:
$Q_{d1} = a - (P_1 - 11)$. $Q_{d1} = Q_s$. $a - (P_1 - 11) = P_1$. Цена ветчины после введения субсидии: $P_1 = 0{,}5(a + 11)$. Объем ветчины: $Q_1 = Q_{d1} = Q_s = P_1 = 0{,}5(a + 11)$.

Пусть I – это постоянный денежный доход населения, который мы можем принять за реальный доход базисного года, в котором еще не было изменений цен, вызванных введением субсидий и налогов.

Тогда реальный доход населения в том году, когда была введена субсидия, можно представить следующим образом: $I_1 = Q_1 \times P_0 + I + 11Q_1 - Q_1 \times P_1 =$
$= 0{,}5(a + 11) \times 0{,}5a + I + 11 \times 0{,}5(a + 11) - 0{,}5(a + 11) \times 0{,}5(a + 11) = I + 2{,}75a + 30{,}25$.

Обратите внимание: в этой формуле
$(Q_1 \times P_0)$ – это новый объем ветчины, умноженный на цену базисного года;
$(I + 11Q_1)$ – это сумма денег, которой сейчас располагают покупатели (номинальный доход + общий объем субсидии);
$(Q_1 \times P_1)$ – это новые номинальные расходы на ветчину;
наконец, разность $(I + 11Q_1) - (Q_1 \times P_1)$ – это новые номинальные расходы на хлеб (поскольку цена хлеба не изменилась, мы можем приравнять их к реальным расходам).

Если введен потоварный налог для продавцов ветчины, функция предложения принимает вид: $Q_{s2} = P_2 - 13$. $Q_d = Q_{s2}$. $a - P_2 = P_2 - 13$. Цена ветчины после введения потоварного налога: $P_2 = 0{,}5(a + 13)$. Объем ветчины: $Q_2 = Q_{s2} = Q_\text{d} = a - 0{,}5(a + 13) =$
$= 0{,}5a - 6{,}5$.

В этом случае реальный доход населения в том году, когда был введен потоварный налог, можно представить следующим образом: $I_2 = Q_2 \times P_0 + I + 13 \times Q_2 - Q_2 \times P_2 =$
$= (0{,}5a - 6{,}5) \times 0{,}5a + I + 13 \times (0{,}5a - 6{,}5) - (0{,}5a - 6{,}5) \times 0{,}5(a + 13) = I + 3{,}25a - 42{,}25$.

Обратите внимание: в этой формуле
$(Q_2 \times P_0)$ – это новый объем ветчины, умноженный на цену базисного года;
$(I + 13 \times Q_2)$ – это сумма денег, которой сейчас располагают покупатели (номинальный доход + общий объем потоварного налога, собранного с производителей ветчины и переданного покупателям хлеба в виде субсидии);
$(Q_2 \times P_2)$ – это новые номинальные расходы на ветчину;
разность $(I + 13 \times Q_2) - (Q_2 \times P_2)$ – это новые номинальные расходы на хлеб (поскольку цена хлеба не изменилась, мы опять-таки можем приравнять их к реальным расходам).

По условию задачи в том и другом случае (как при введении субсидии, так и при введении налога) новые реальные доходы будут равны, т.е. $I_1 = I_2$.

$I + 2{,}75a + 30{,}25 = I + 3{,}25a - 42{,}25.$ $a = 145.$

Ответ. $Q_d = 145 - P$.

S058. Каждая ученица монгольской балетной школы получает в день 600 тугриков на приобретение продуктов питания – белков, жиров и углеводов. Будем предполагать, что все эти деньги используются по назначению. Один грамм белков стоит 5 тугриков, жиров – 2 тугрика, углеводов – 1 тугрик. Ученицы должны придерживаться строгой диеты, согласно которой суммарный вес всех съедаемых за день продуктов должен быть равен в точности 300 граммам. Функция полезности каждой ученицы имеет вид: $U = XYZ$, где X, Y, Z – соответственно объемы съедаемых за день белков, жиров и углеводов в граммах.

Сколько граммов каждого продукта будет съедать за день ученица?

Решение

Бюджетное ограничение: $600 = 5X + 2Y + Z$. **(1)**

Ограничение, предписываемое диетой: $300 = X + Y + Z$. **(2)**

Вычитая из уравнения **(1)** уравнение **(2)**, получаем: $300 = 4X + Y$. $Y = 300 - 4X$. Из уравнения **(2)** $Z = 300 - X - Y = 300 - X - (300 - 4X) = 3X$.

Функция полезности $U = XYZ = X\,(300 - 4X)\,3X = 900X^2 - 12X^3$. Максимум функции полезности достигается при условии: $U' = 1800X - 36X^2 = 0$. $X = 50$. $Y = 300 - 4X = 100$. $Z = 3X = 150$.

Ответ: 50 грамм белков, 100 грамм жиров, 150 грамм углеводов.

S059. Однажды наступил день, когда король Людовик N-й получил в наследство престол от своего предшественника, Людовика под номером $N - 1$. Рассеянно выслушав доклад министра финансов, Людовик N-й понял следующее: вся денежная масса в стране состоит из бумажных денег, эмитированных государством (другими словами, денежная масса всегда равна денежной базе). При этом весь ежегодный прирост денежной массы происходит за счет расходов двора на проведение праздников, балов-маскарадов, торжественных приемов, банкетов и т.п. Предшественник Людовика N-го ежегодно увеличивал расходы двора (и, соответственно, эмиссию) на 1 миллион франков по отношению к предыдущему году. Предварительно эта тенденция заложена в планы министерства финансов и на последующие годы.

Однако, предупредил министр финансов, бесконечно так продолжаться не может. Если годовая эмиссия превысит критический порог – 2% от денежной массы на начало года, то одно лишь это обстоятельство может стать причиной серьезных социальных потрясений – например, экономического кризиса, крестьянских бунтов и даже буржуазной революции.

На это король сказал: «Предположим, тенденция роста расходов сохранится. Каким будет прирост денежной массы, скажем, на 50-м году моего правления?» Министр финансов ответил: «Если ничего не произойдет, то, согласно моим формулам, размер эмиссии в течение 50-го года достигнет 70 миллионов франков, и это составит ровно 2% по отношению к денежной массе на начало 50-го года». «Ну, вот – сказал король. – Стоит ли беспокоиться? А если в дальнейшем расходы зашкалят за 2%, то пусть с этой проблемой разбирается мой престолонаследник – Людовик под номером $N + 1$».

Согласитесь ли Вы с тем, что Людовику N-му не о чем беспокоиться? Существует ли вообще год, когда размер эмиссии «зашкалит» за 2% от денежной массы на начало года?

Решение

Пусть M – денежная масса *в начале* первого года правления Людовика N-го, x – расходы двора (и, соответственно, эмиссия, т.е. прирост денежной массы) *в течение* первого года его правления. Тогда $(x + t - 1)$ – прирост денежной массы в течение t-го года правления.

Денежная масса на начало t-го года (для $t > 3$):

$$M_t = M + x + (x+1) + \ldots + (x+t-2) = M + \frac{x + (x+t-2)}{2} \times (t-1).$$

Отношение прироста денежной массы в течение t-го года к размеру денежной массы на начало t-го года: $\dfrac{x+t-1}{M+(x-1+0{,}5t)(t-1)}$. Известно, что в 50-м году прирост денежной массы равен 70 млн. Т.е. $x + t - 1 = x + 50 - 1 = 70$. $x = 21$.

Тогда для 50-го года: $\dfrac{x+t-1}{M+(x-1+0{,}5t)(t-1)} = \dfrac{21+50-1}{M+(21-1+0{,}5\times 50)(50-1)} = 0{,}02.$

$\dfrac{70}{M+2205} = 0{,}02.$ $M = 1295$. А теперь определим годы, в которых отношение прироста денежной массы к ее уровню на начало года равно 0,02.

$$\frac{x+t-1}{M+(x-1+0{,}5t)(t-1)} = \frac{21+t-1}{1295+(21-1+0{,}5t)(t-1)} = \frac{20+t}{1275+19{,}5t+0{,}5t^2} = 0{,}02.$$

$0{,}01t^2 - 0{,}61t + 5{,}5 = 0.$ $t_1 = 50$, $t_2 = 11$. Значение $t_1 = 50$ нам уже известно из условия. Появление значения $t_2 = 11$ дает основание предполагать, что функция

$Y = \dfrac{20+t}{1275+19{,}5t+0{,}5t^2}$ имеет на интервале $t \in [11, 50]$ либо максимум, либо минимум.

$$Y' = \frac{1275+19{,}5t+0{,}5t^2-(20+t)(19{,}5+t)}{(1275+19{,}5t+0{,}5t^2)^2} = \frac{-0{,}5t^2-20t+885}{(1275+19{,}5t+0{,}5t^2)^2} = 0.$$

$-0{,}5t^2 - 20t + 885 = 0.$ $t_1 = -66{,}58$, $t_2 = 26{,}583$. К периоду правления Людовика N-го относится только значение $t_2 = 26{,}583$. При этом значении $Y = 0{,}0217$. То есть с 12-го года правления Людовика N-го по 49-й год включительно размер эмиссии «зашкаливает» за безопасные 2%.

Ответ. Размер эмиссии превышает 2% от денежной массы на начало года для каждого года начиная с 12-го и заканчивая 49-м.

S060. Придворные одной Королевы всегда высаживали в саду не те кусты роз, которые надо было. Однажды они высадили 90 кустов белой розы, в то время как функция полезности Королевы имеет вид: $U = XYZ$, где X – число кустов белых роз, Y – число черных, Z – число красных. Поэтому, естественно, часть кустов пришлось перекрашивать. Перекрашивание одного куста в черный цвет стоит 2 ф.ст., в красный – 5 ф.ст. На перекрашивание белых кустов розы казначей выделил 90 ф.ст. Сколько кустов придворные перекрасят в черный цвет и сколько – в красный, максимизируя функцию полезности Королевы?

Решение

Общее число кустов: $X + Y + Z = 90$. $X = 90 - Y - Z$. Бюджетное уравнение:

$90 = 2Y + 5Z$. $Z = 18 - 0{,}4Y$. $X = 90 - Y - (18 - 0{,}4Y) = 72 - 0{,}6Y$.

$U = XYZ = (72 - 0{,}6Y)\,Y\,(18 - 0{,}4Y) = 0{,}24Y^3 - 39{,}6Y^2 + 1296Y$.

$U' = 0{,}72Y^2 - 79{,}2Y + 1296 = 0$. $Y^2 - 110Y + 1800 = 0$. $Y = 20$, $Z = 18 - 0{,}4Y = 10$.

Ответ. 20 кустов перекрасят в черный цвет, 10 кустов перекрасят в красный.