**Задача “Равенство через налоги”**

В правительстве заметили, что для каждого гражданина страны выполняется такая закономерность: средний доход тех, кто богаче данного гражданина, превышает средний доход тех, кто его беднее, на величину $ay$, где $y$ – средний душевой доход, $a$ – некоторая положительная константа.

**(a)** Докажите, что коэффициент Джини в этой стране не превышает $1/3$.

**(b)** Докажите, что в условиях совершенной информации правительство может добиться полного равенства доходов, перераспределив между гражданами страны не более $1/4$ национального дохода посредством налогов и трансфертов.

*Математическая справка*:

- Неопределённый интеграл от степени: $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$.
- Формула Ньютона-Лейбница: если $F'(x) = f(x)$, то $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

**Решение.**

**(a)**

Обозначим национальный доход страны через $Y$, а численность населения – через $N$. Тогда средний душевой доход равен $y = \frac{Y}{N}$. Допустим, функция $f(x)$ задаёт кривую Лоренца: $x \cdot 100\%$ самых бедных граждан суммарно зарабатывают $f(x) \cdot 100\%$ национального дохода. Соответственно, $0 \leq x \leq 1$ и $0 \leq f(x) \leq 1$, функция $f(x)$ является неубывающей, а также $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$.

Описанную в условии закономерность формально можно записать так:

$$\frac{Y(1 - f(x))}{N(1 - x)} = \frac{Yf(x)}{Nx} + a\frac{Y}{N} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1 - f(x)}{1 - x} = \frac{f(x)}{x} + a.$$

Преобразуем равенство и выражаем функцию $f(x) = ax^2 + (1 - a)x$.

Кривая Лоренца никогда не убывает, следовательно, при любом $0 \leq x \leq 1$ должно выполняться условие

$$f'(x) = 2ax + (1 - a) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2a}.$$

Чтобы это условие соблюдалось при любом $0 \leq x \leq 1$, оно должно выполняться при минимальном значении переменной $x$, то есть при $x = 0$. Значит,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2a} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \leq 1.$$

(В качестве альтернативы можно также сказать, что вершина параболы, задающей кривую Лоренца, должна иметь неположительную абсциссу: $-(1-a)/2a \leq 0$, из чего следует, что $a \leq 1$.)

По определению коэффициент Джини есть

$$GC = \frac{\frac{1}{2} - \int_0^1 f(x)dx}{\frac{1}{2}}$$

Производим расчёт:

$$GC = 1 - 2\int_0^1 f(x)dx = 1 - 2\left(a\frac{x^3}{3} + (1-a)\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = 1 - 2\left(\frac{a}{3} + \frac{1-a}{2}\right) = \frac{a}{3}.$$

Поскольку $a \leq 1$, то $GC = a/3 \leq 1/3$. Вывод: в данной стране коэффициент Джини, действительно, не может быть больше $1/3$ (такое значение $GC$ достигается при $a = 1$).

**(b)**

Пусть $T$ – суммарный объём перераспределяемых доходов (это же сумма налогов, это же сумма трансфертов). Тогда требуется показать, что при грамотной налогово-транфертной политике величина $T/Y$ не превышает $1/4$.

Грамотная политика не предполагает, что кто-либо из граждан платит налоги и одновременно получает трансферты (в контексте задачи это нерационально, неэкономично). Вместо этого всё население делится на две группы: $x_0 \cdot 100\%$ самых бедных граждан получают трансферты (и не платят налоги), а $(1-x_0) \cdot 100\%$ самых богатых граждан платят налоги (но не получают трансферты), причём $0 \leq x_0 \leq 1$. В таком случае сумма налогов есть разница между новым (после уравнивания) суммарным доходом бедных граждан и их исходным суммарным доходом:

$$T(x_0) = Yx_0 - Yf(x_0).$$

(Альтернативно можно сказать, что сумма налогов есть разница между исходным суммарным доходом богатых и их новым (после уравнивания) суммарным доходом: $T(x_0) = Y(1 - f(x_0)) - Y(1 - x_0) = Yx_0 - Yf(x_0)$.)

Итак, $T(x_0)/Y = x_0 - f(x_0)$. Наша задача – показать, что эта величина не превышает $1/4$. Рассмотрим *худший случай*, то есть найдём максимальное значение функции

$$\frac{T(x_0)}{Y} = x_0 - f(x_0) = x_0 - ax_0^2 - x_0 + ax_0 = ax_0 - ax_0^2 = ax_0(1-x_0) = (-a)x_0(x_0 - 1).$$

График этой функции является параболой с корнями $x = 0$ и $x = 1$, ветви этой параболы направлены вниз ($a > 0$). Следовательно, функция имеет единственную точку максимума $x_0^* = \frac{1}{2}$. Подставляем это значение обратно в функцию и получаем, что в худшем случае сумма налогов $T(x_0^*)$ не превысит $1/4$ национального дохода $Y$:

$$\frac{T(x_0^*)}{Y} = a\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} \leq \frac{1}{4}.$$