Решение

а) Одним из способов решения является решение в общем виде, с помощью него мы сможем быстро решить первые два пункта.
Запишем отдельно суммы, которые Дмитрий будет брать в долг, и те, которые будет возвращать.
Т.к Дмитрий берет деньги в долг каждый нечетный год, следовательно его долг за n периодов (где n - четное число т.к возврат средств осуществляется в четном периоде) равен:

$$\frac{1{,}1}{2}+\frac{1{,}1^3}{2^3}+\frac{1{,}1^5}{2^5}+\cdots+\frac{1{,}1^{n-1}}{2^{n-1}}=\frac{\frac{1{,}1}{2}\left(1-\left(\frac{1{,}1^2}{2^2}\right)^{0{,}5n}\right)}{1-\frac{1{,}1^2}{2^2}}$$

Тогда сумма, которую он будет возвращать равна:

$$\frac{1{,}1^2}{2^2}+\frac{1{,}1^4}{2^4}+\frac{1{,}1^6}{2^6}+\cdots+\frac{1{,}1^{n}}{2^{n}}=\frac{\frac{1{,}1^2}{2^2}\left(1-\left(\frac{1{,}1^2}{2^2}\right)^{0{,}5n}\right)}{1-\frac{1{,}1^2}{2^2}}$$

Данные суммы можно свернуть по формуле суммы геометрической прогрессии:

Взял в долг: $\frac{11\times 20^{n+1}-20\times 11^{n+1}}{279\times 20^{n}}$

Вернул: $\frac{121\times 400^{0{,}5n+1}-400\times 121^{0{,}5n+1}}{279\times 400^{0{,}5n+1}}$

Заметим, что если нам нужно 10 самолетов, то занимаем деньги мы только на 9 самолетов, т.к на один самолет у нас есть деньги. Если мы занимаем деньги на 9 самолетов, то мы занимаем их в 1,3,5,7…17 периодах, следовательно последний платеж Александру придет в 18-м периоде, тогда n = 18 и подставив данное n во второе уравнение мы получим ответ на первый пункт:

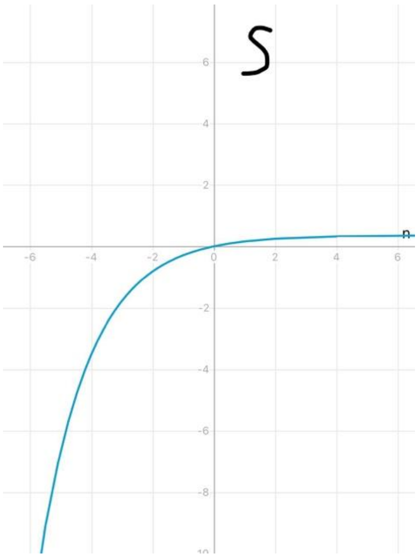
$$\frac{121\times 400^{9+1}-400\times 121^{9+1}}{279\times 400^{9+1}}\approx 0.43$$

б) Заметим, что максимальная сумма, которую Александр будет готов заплатить коллекторам, будет равна сумме, которую он давал в долг, за вычетом суммы, которую он получил с Дмитрия:

$$\mathbf{S(n)}=\frac{11\times20^{n+1}-20\times11^{n+1}}{279\times20^{n}}-\frac{121\times400^{0,5n+1}-400\times121^{0,5n+1}}{279\times400^{0,5n+1}}=$$

$$=\frac{11\times20^{2n+3}-20^{n+3}\times11^{n+1}-121\times20^{2n+2}+20^{n+2}\times121^{0,5n+1}}{279\times20^{2n+2}}$$

График:



в)

Найдем сумму долга, которая остается после второго периода, т. е после нашей первой выплаты:

$$\frac{1,1}{2}-\frac{1,1^2}{2^2}=\frac{1,1(2-1,1)}{2^2}$$

она равна сумме, которую мы заняли, за вычетом суммы, которую мы выплатили. Аналогично проделывая в остальных периодах, можно заметить, что долг с каждым разом увеличивается в определенное число раз:

$$\underbrace{\frac{1,1(2-1,1)}{2^2}}_{\text{долг после 1-го}}+\underbrace{\frac{1,1^3(2-1,1)}{2^4}}_{\text{долг после 2-го}}+\underbrace{\frac{1,1^5(2-1,1)}{2^6}}_{\text{долг после 3-го}}+\ldots+\underbrace{\frac{1,1^{n-1}(2-1,1)}{2^n}}_{\text{долг после n-го}}$$

По формуле знаменателя геометрической прогрессии найдем, что долг в каждом периоде растет в $\frac{1,1^2}{2^2}$ раз. Так как сумма арендной платы должна в каждом периоде полностью покрывать накопившийся долг, следовательно арендная плата должна расти с таким же темпом как и долг, т. е в $\frac{1,1^2}{2^2}$ раза.