XXX Международный экономический фестиваль школьников
«Сибириада. Шаг в мечту»
Олимпиада по экономике для учащихся 11-х классов 1.03.2023
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП
Каждая задача оценивается из 20 баллов

Задача 1. «Простые» и «непростые» орешки

В сказочной стране царя Салтана производством двух уникальных продуктов – «простых» и «непростых» орешков – занимается единственная фирма «Елочка», в которой работает всего 4 работника.

Производить эти орешки можно по технологии А: один любой работник может произвести максимум 100 «простых» или 30 «непростых» орешка за неделю. По технологии Б: двое любых работников, работая вместе, могут произвести максимум 200 «простых» или 80 «непростых» орешков за неделю. По технологии В нужны трое любых работников, которые вместе могут произвести максимум 300 «простых» или 150 «непростых» орешков за неделю. Технологии линейные и могут комбинироваться как угодно в рамках ограничений по работникам. Производимое число орешков – целое число!

Пояснение: дробного числа работников не может быть. Если работники начали работать по одной технологии, то они работают по ней всю неделю – ситуация, когда работник часть недели работает на одной технологии, а потом переключился на другую – невозможна!

А) Запишите уравнение и нарисуйте график кривой производственных возможностей фирмы «Елочка» (на графике должны быть указаны координаты всех граничных точек и точек перелома, если они есть).

Б) Фирма «Елочка» фасует свои орешки в пакетики, содержащие 3 «простых» и 1 «непростой» орешек – так любят жители страны царя Салтана. Сколько пакетиков с орешками сможет сделать фирма и сколько орешков каждого вида при этом будет производиться и по каким технологиям?

В) За морем за Окияном расположилась страна князя Гвидона, и ее жители также любят «простые» и «непростые» орешки, которые производит единственная фирма «Белочка». 4 работника этой фирмы работают все вместе по уникальной технологии У. По этой технологии производят максимум 300 «простых» или 600 «непростых» орешков. Технология линейная, но производимое число орешков – также целое.

Фирма «Белочка» также фасует орешки в пакетики, но в пропорции 1 «простой» и 2 «непростых» – как любят жители страны князя Гвидона. Сколько пакетиков с орешками сможет сделать фирма и сколько орешков каждого вида при этом будет производиться?

Г) Представители «Елочки» вместе со своим царем Салтаном наконец посетили князя Гвидона и познакомились с технологией производства орешков «Белочкой», а также поделились знаниями о всех своих технологиях. Определите, какими будут максимальные возможности фирм по производству орешков с учетом доступности новых технологий и запишите уравнение соответствующей линии, нарисуйте ее график. Сколько орешков и по какой технологии (или каким технологиям) будет теперь производиться в каждой стране? *Помним, что производится только целое число орешков!*

<u>Решение</u>:

А) Получается всего 4 варианта комбинации технологий в стране Салтана:

1) каждый из 4 работников – по технологии А;
2) двое по технологии А, двое одной группой по технологии Б;
3) двумя группами по технологии Б;
4) один по технологии А и трое группой по технологии В.

Максимальные объемы производства

Вариант	«простые» орешки, x	«непростые» орешки, y	Точки перелома, (x;y)
4 А	400	120	нет
2 А + 1 Б	400	140	(200; 80)
2 Б	400	160	нет
1 А + 1 В	400	180	(100; 150)

Можно рассуждать таким путем: построить КПВ по всем вариантам, и выбрать ту, которая будет располагаться выше – т.е. обеспечивать большее производство при тех же самых ресурсах (4 работника):

КПВ варианта 1: $y = 120 - 0{,}3x$

КПВ варианта 2: $y = 140 - 0{,}3x$ для $0 \le x \le 200$

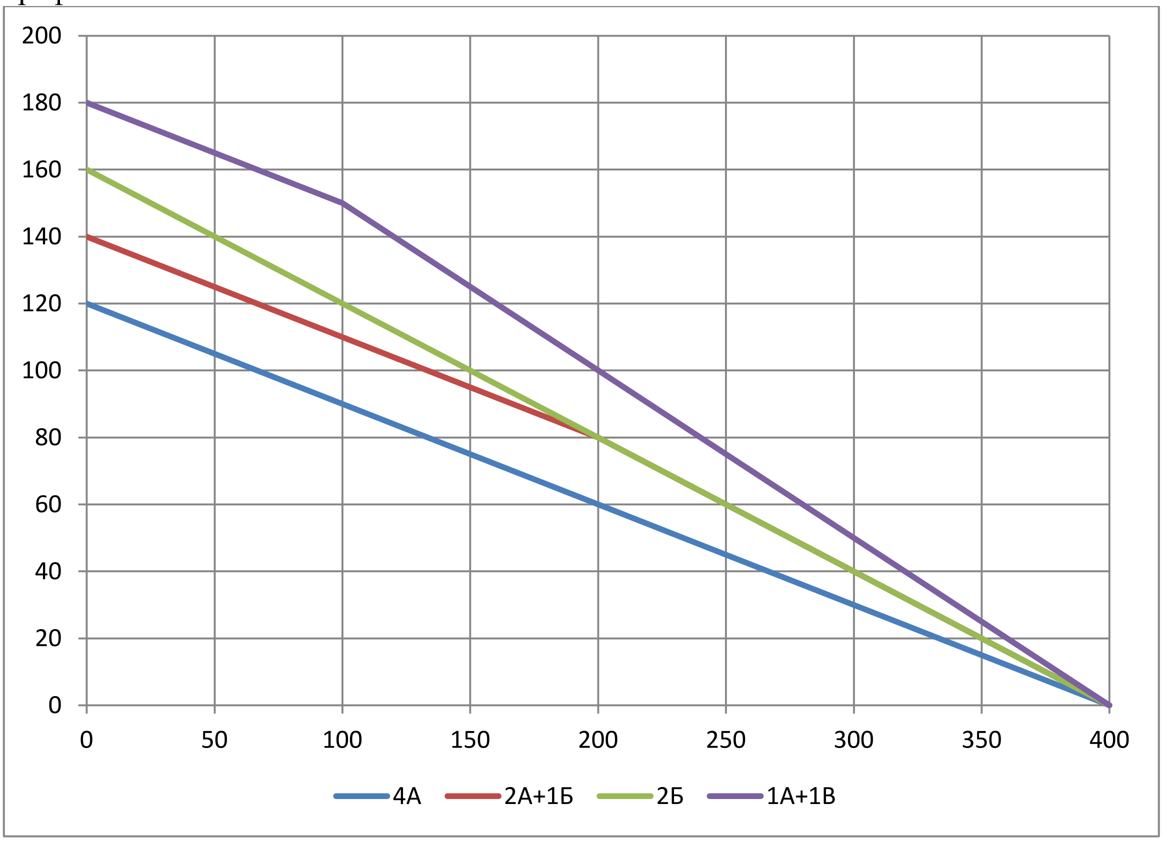
$160 - 0{,}4x$ для $200 \le x \le 400$

КПВ варианта 3: $y = 160 - 0{,}4x$

КПВ варианта 4: $y = 180 - 0{,}3x$ для $0 \le x \le 100$

$200 - 0{,}5x$ для $100 \le x \le 400$

Графики:



Таким образом, итоговое КПВ – по последнему варианту:

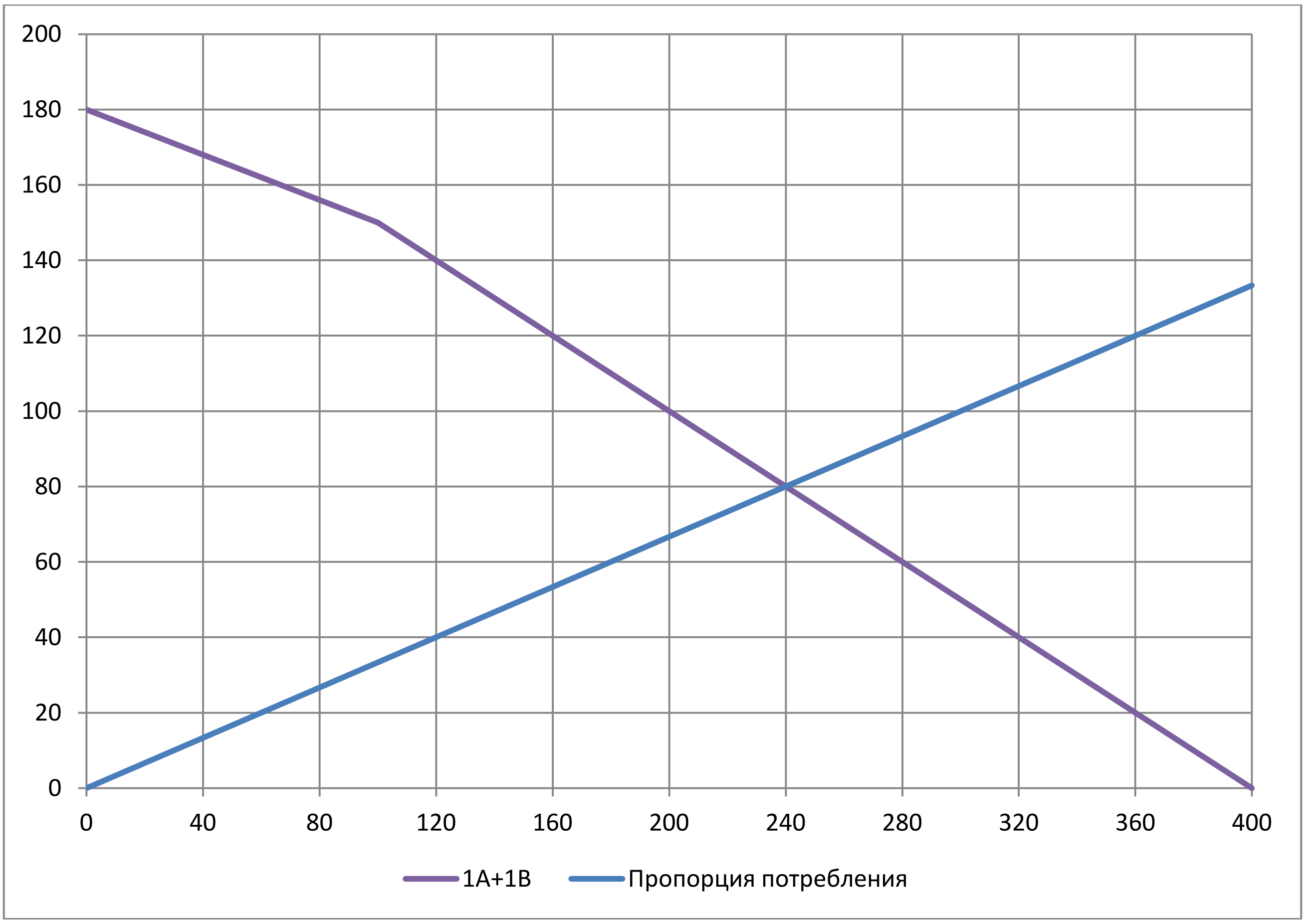
$y = 180 - 0{,}3x$ для $0 \le x < 100$

$200 - 0{,}5x$ для $100 \le x \le 400$

Узловые точки (простые; непростые) = (x, y): (400;0), (100; 150), (0;180)

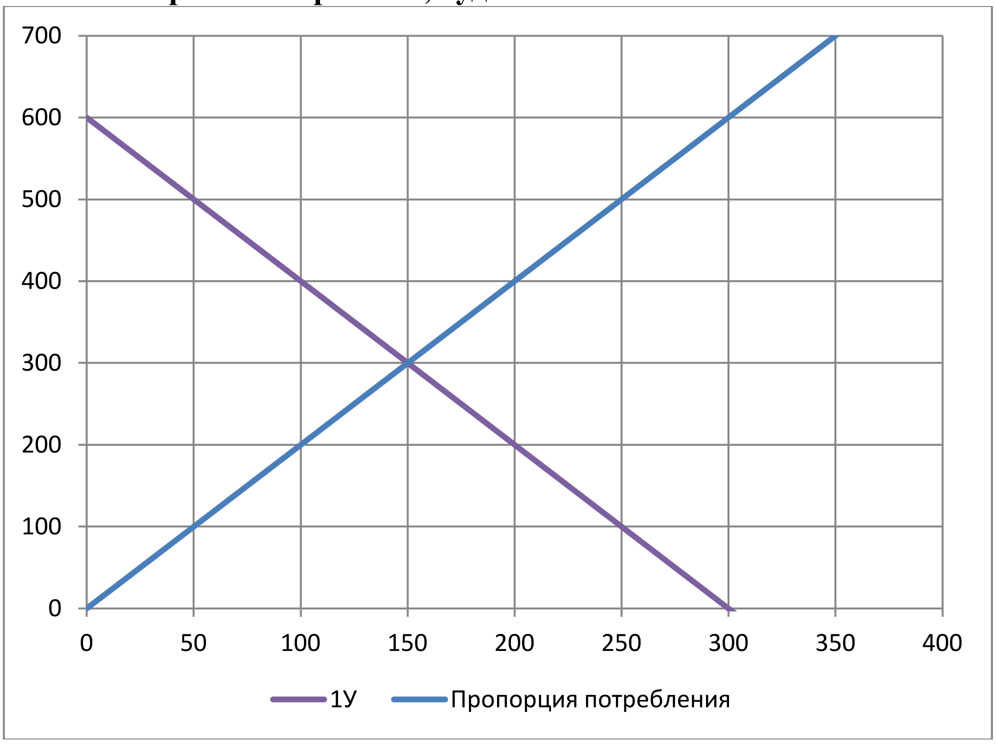
Б) С учетом пропорции ($x = 3y$) получаем, что «Елочкой» будет **производиться 240 «простых» орешков», 80 «непростых» и, соответственно, 80 пакетиков**. Рисунок ниже.

Орешки производятся: 100 «простых» по технологии А, 140 «простых» по технологии В, 80 «непростых» – по технологии В.



В) У «Белочки» одна технология, и все четверо работников работают на ней: 1У. Получаем КПВ «Белочки» – линейное: y = 600 – 2x

С учетом пропорции (2x = y) в пакетиках от «Белочки» будет **производиться 150 «простых» и 300 «непростых» орешков, будет 150 пакетиков**.



Г) Заметим, что, поскольку обеим странам теперь доступны все технологии, то нужные нам линии максимальных возможностей по производству орешков для обеих фирм «Елочка» и «Белочка» будут одинаковыми.

У нас есть две разные технологии, и каждая использует полный набор ресурсов (4 работника для каждой страны). Значит исходные КПВ нельзя «складывать»!

Также отметим: по условию нужно найти линию, отражающую максимальные возможности с учетом доступности странам всех технологий. Логика построения такой линии может быть следующая: фирмы при производстве, например определенного количества «простых» орешков, могут заранее принимать решение о том, по какой технологии им производить орешки, чтобы произвести максимум «непростых» орешков. Тогда достаточно построить старую КПВ «Елочки» и КПВ «Белочки» на одном графике, и взять верхнюю огибающую, как линию, которая показывает максимально возможный объем производства фирмы, хотя и при разных технологиях.

Итого, если все технологии станут доступны обеим странам, то КПВ «Елочки» и «Белочки» станет ломаной вогнутой к началу координат (точка перегиба: (800/3; 200/3) ≈ (266,7; 66,7)).

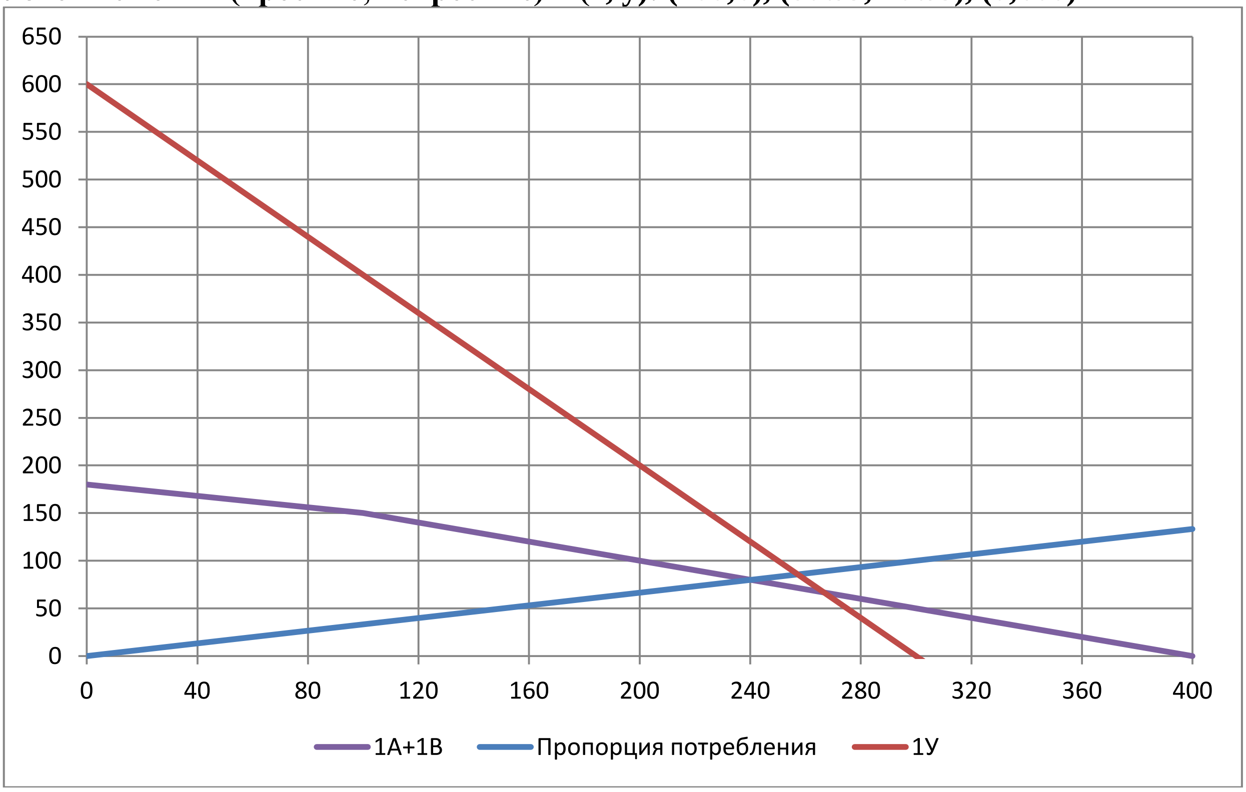
Отметим, что следование требованию целочисленности тут никак не исказит полученную линию.

Уравнение КПВ+

$y = 600 - 2x$ для $0 \le x \le 800/3$

$200 - 0{,}5x$ для $800/3 < x \le 400$

Узловые точки (простые; непростые) = (x, y): (400;0), (800/3; 200/3), (0;600)

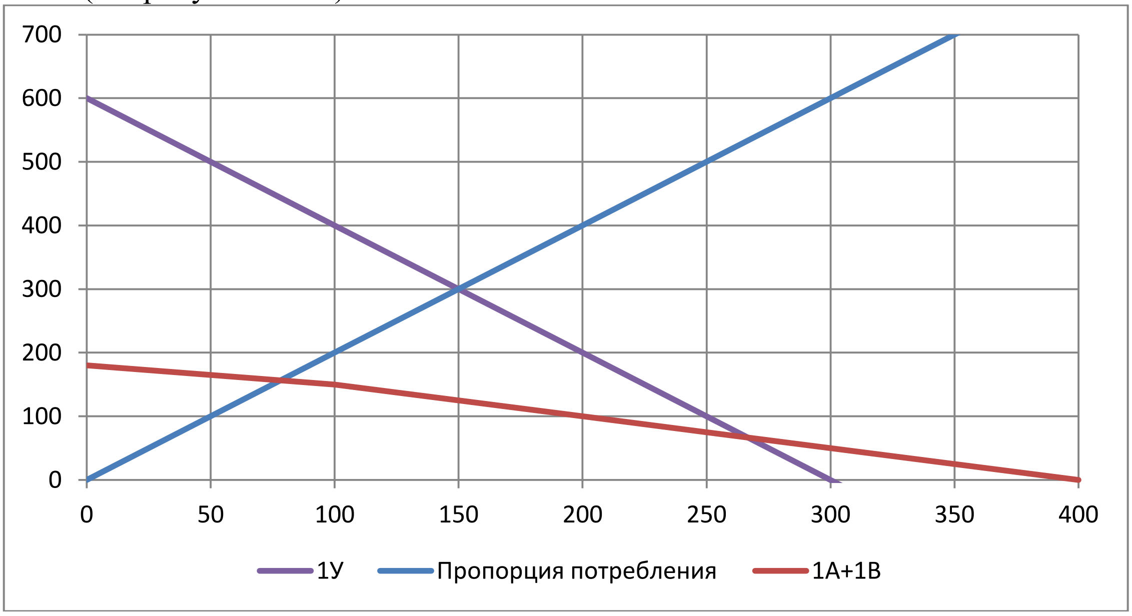


При этом «Елочка» при своей пропорции станет больше производить: если следовать линии пропорции, то точкой получится: (1800/7; 600/7) = (257,14; 85,71). С учетом целочисленности (тут она как раз и нужна) и пропорции получаем **оптимальной точкой становится (255; 85)**. Она лежит **ниже** КПВ «Елочки», но выше ее старой КПВ (по старой КПВ точке x = 255 соответствует точка y = 72,5, на новой КПВ y = 90).

Производство большего числа орешков, чем нужно (например, точки (256; 85) и (257; 85)) **представляется нерациональным использованием ресурсов**, поскольку фирмы не смогут сформировать еще один комплект и продать его!

Производство будет осуществляться по технологии У.

Оптимальная точка производства для «Белочки» и используемая ею технология не изменятся (см. рисунок ниже).



Критерии:

Пункт (А): всего за корректный ответ **4 балла:**

- за полностью правильное уравнение 2 балла,

- 2 балла за полностью правильный график – 1 балл за точки, 1 балл за корректный общий вид графика.

Если не выбрана итоговая технология для страны, то 0 баллов за весь пункт.

Если дан верный ответ, но при этом не рассмотрены все технологии, то 2 балла из 4-х за пункт.

Пункт (Б): всего за корректный ответ **4 балла**:

- 1 балл за число «простых» орешков
- 1 балл за число «непростых» орешков
- 1 балл за число пакетиков
- 1 балл за указание технологий

Если ответ (число орешков и пакетиков) не целочисленный – то за него 0 баллов.

Пункт (В): всего за корректный ответ **3 балла**:

- 1 балл за число «простых» орешков
- 1 балл за число «непростых» орешков
- 1 балл за число пакетиков

Если ответ (число орешков и пакетиков) не целочисленный – то за него 0 баллов.

Пункт (Г): всего за корректный ответ **9 баллов**:

- за полностью правильное уравнение 2 балла,

- 2 балла за полностью правильный график – 1 балл за точки, 1 балл за корректный общий вид графика.

- 4 балла за вычисление целочисленной(!) новой оптимальной точки для «Елочки»

Если указан верный ответ по числу орешков и пакетиков, но неверная технология, то 3 балла.

Если указано верное число пакетиков с орешками, но производится лишнее количество орешков (то есть фирма поступает нерационально), то ставится только 1 балл.

Если ответ (число орешков / пакетиков) не целочисленный – то здесь 0 баллов.

- 1 балл за вычисление точки / указание, что для «Белочки» ничего не поменяется.

Задача 2. NEBOLIN от OZVERINa

В Лунной стране превышен эпидемиологический порог заболеваемости вирусом OZVERIN. Вызываемая этим вирусом болезнь при отсутствии лечения длится 14 дней, на протяжении которых больной нетрудоспособен. После выздоровления формируется пожизненный иммунитет к вирусу.

На предприятии MIGL&Co профсоюз имеет специальный фонд «Здоровье», из которого оплачиваются профилактические и лечебные мероприятия для работников. Из этого же фонда профсоюз выплачивает заболевшим работникам пособия по временной нетрудоспособности в размере 75 фертингов в день. По рекомендации медиков профсоюз решил закупить за счет фонда препарат NEBOLIN, прием которого сокращает продолжительность заболевания. Препарат принимают с первого дня заболевания строго по 1 капсуле в день. Каждая принятая больным капсула NEBOLINa сокращает продолжительность заболевания на 1 день.

Было принято решение закупить такое количество капсул препарата (в расчете на одного работника), чтобы достичь максимального общего здоровьесберегающего эффекта (H), который в условиях развернувшейся эпидемии описывается функцией $\mathrm{H} = 150\sqrt{\mathrm{X}} + \mathrm{Y}$, где X - количество капсул NEBOLINa, выданное одному заболевшему работнику (капсулы выдаются только больным работникам с первого дня заболевания), Y – расходы на другие профилактические и лечебные мероприятия в расчете на одного работника, не считая оплаты пособия по временной нетрудоспособности. Одна капсула NEBOLINa стоит 150 фертингов, средства фонда не позволяют потратить более 1500 фертингов в расчете на одного работника.

Ответьте на следующие вопросы (каждый из вопросов рассматривается независимо от других).

А) Какое количество капсул NEBOLINa будет закуплено профсоюзом в расчете на одного работника? Сколько будет потрачено на оплату пособия по временной нетрудоспособности каждому заболевшему? На какую сумму будут оплачены каждому работнику профилактические и лечебные мероприятия (не считая оплаты пособия по временной нетрудоспособности)?

Б) Предположим, что при покупке NEBOLINa правительство компенсирует (возвращает покупателю) треть цены. Какое количество препарата должен закупить профсоюз в этих условиях? Какая сумма будет потрачена на другие профилактические и лечебные мероприятия (не считая оплаты пособия по временной нетрудоспособности) в расчете на одного работника?

В) Предположим, что при покупке NEBOLINa правительство компенсирует (возвращает покупателю) две трети цены. Какое количество препарата должен закупить профсоюз в этих условиях? Какая сумма будет потрачена на другие профилактические и лечебные мероприятия (не считая оплаты пособия по временной нетрудоспособности) в расчете на одного работника?

Решение:

А) Согласно условию, профсоюз максимизирует функцию H в условиях бюджетного ограничения: его расходы на оплату лекарственного препарата ($150X$), оплату больничного ($75\cdot(14-X)$, при этом X не превышает 7 капсул, поскольку на 8-й день работник уже здоров) и профилактических и лечебных мероприятий (Y) должны в сумме составить 1500 фертингов:

$$\begin{cases} 150\sqrt{X} + Y \to max \\ 1500 = 150X + 75\cdot(14 - X) + Y \\ X \leq 7 \end{cases}$$

Выразим Y из бюджетного ограничения и подставим в целевую функцию, получим функцию одной переменной, для которой необходимо найти такое значение аргумента, при котором функция достигает максимума:

$$\begin{cases} 150\sqrt{X} + 1500 - 150X - 75\cdot(14 - X) \to max \\ X \leq 7 \end{cases}$$

или

$$\{150\sqrt{X} + 450 - 75X \to max\ X \leq 7$$

Можно найти значение X при котором данная функция достигает максимального значения (приравняв производную к нулю, затем проверив знак второй производной), можно произвести замену переменной $z = \sqrt{X}$, тогда наша функция принимает вид параболы, ветви которой обращены вниз, то есть ее единственный экстремум является максимумом:

$$150z + 450 - 75z^2 \to max$$

Вершина параболы $z = \frac{150}{2\cdot 75} = 1$, то есть $X = 1$.

Таким образом, профсоюз закупит по 1 капсуле NEBOLINа в расчете на одного работника. Продолжительность заболевания составит 13 дней, а расходы на оплату пособия $13\cdot 75 = 975$ фертингов. На оплату профилактических и лечебных мероприятий может быть потрачено $1500 - 150 \cdot 1 - 975 = 375$ фертингов.

Б) Теперь задача меняется:

$$\{150\sqrt{X} + Y \to max\ 1500 = 100X + 75 \cdot (14 - X) + Y\ X \leq 7$$

Или $\{150\sqrt{X} + 1500 - 100X - 75 \cdot (14 - X) \to max\ X \leq 7 \quad \to \quad \{150\sqrt{X} + 450 - 25X \to max\ X \leq 7$

После замены переменной $z = \sqrt{X}$ получаем

$$150z + 450 - 25z^2 \to max$$

Вершина параболы $z = \frac{150}{2\cdot 25} = 3$, то есть $X = 9$.

Однако, количество дней, которое больной получает препарат не может превышать 7, поскольку на 8-й день он уже здоров ($X \leq 7$). Поэтому профсоюз купит 7 капсул NEBOLINа каждому работнику, оплатит 7 дней нетрудоспособности ($7 \cdot 75 = 525$ фертингов) и сможет оплатить профилактических и лечебных мероприятий каждому работнику на сумму $1500 - 7 \cdot 100 - 525 = 275$ фертингов.

В) В новых условиях профсоюз, покупая одну капсулу препарата получает чистую экономию: одна капсула, которая стоит 50 фертингов, сокращает на один день период нетрудоспособности и, таким образом, экономит профсоюзу 75 фертингов. Следовательно, профсоюзу выгодно закупать максимальное количество капсул на каждого работника, то есть 7. Срок нетрудоспособности составит 7 дней, а на проведение профилактических и лечебных мероприятий остается $1500 - 50 \cdot 7 - 75 \cdot 7 = 625$ фертингов.

Формальное решение:

В новых условиях необходимо решить задачу:

$$\{150\sqrt{X} + Y \to max\ 1500 = 50X + 75 \cdot (14 - X) + Y\ X \leq 7$$

Которая после подстановки превращается в следующую:

$$\{150\sqrt{X} + 1500 - 50X - 75 \cdot (14 - X) \rightarrow max\ X \leq 7 \quad \rightarrow \quad \{150\sqrt{X} + 450 + 25X \rightarrow max\ X \leq 7$$

После замены переменной $z = \sqrt{X}$ получаем $150z + 450 + 25z^2 \rightarrow max$

Это уже парабола ветвями вверх, но ее максимум нужно искать на интервале $0 \leq X \leq 7$ или $0 \leq z^2 \leq 7$ (так как $X = z^2$). Вершина этой параболы достигается при $z = -3$, то есть на участке, где $z \geq 0$ функция является возрастающей. Поэтому ее максимум достигается на правой границе интервала при $z^2 = X = 7$. Тогда $Y = 1500 - 50 \cdot 7 - 75 \cdot 7 = 625$.

Критерии:

А)	*Количество закупаемого лекарства*	*4 балла*
	Расходы на оплату пособия по временной нетрудоспособности одному работнику	*3 балла*
	Расходы на оплату лечебных и профилактических мероприятий одному работнику	*3 балла*
Б)	*верный ответ на все вопросы*	*5 баллов*
В)	*верный ответ на все вопросы*	*5 баллов*

Неучет в бюджетном ограничении затрат на закупку лекарственного препарата или/и расходов на оплату пособий по временной нетрудоспособности (по болезни) считается грубой ошибкой и ведет к оцениванию в 0 баллов решения всей задачи.

Решение задачи перебором при предположении целочисленности количества капсул препарата оценивается полным баллом при получении верного ответа и переборе всех возможных значений количества капсул лекарства.

Арифметическая ошибка приводит к потере 1 балла.

Отсутствие проверки достаточного условия достижения максимума функции здоровьесберегающего эффекта (Н) приводит к потере 1 балла (однократно).

Если в пунктах Б) и В) количество закупаемого лекарства определено неверно, то решение оценивается 0 баллов.

В пунктах Б) и В) решение, в котором верно определено количество закупаемого лекарства, но не определены расходы на оплату лечебных и профилактических мероприятий одному работнику, оценивается 3 баллами.

Задача 3. Биопестицид или как победить саранчу

В небольшой стране N, основой экономики которой является сельское хозяйство, предприятие «Чистое поле» единственное производит средство от саранчи Фунгакрид – биопестицид, действующий избирательно только на насекомых-вредителей и характеризующийся низким уровнем токсичности. Руководству предприятия известна функция общих издержек производства средства Фунгакрид, а также функция спроса на это средство: $TC(Q) = 70 + 20Q + 0.5Q^2$ и $Q_D = 80 - P$, где $TC -$ сумма общих издержек производства (тыс. тугриков), Q – количество производимого средства Фунгакрид (тыс. упаковок), Q_D – величина спроса на средство (тыс. упаковок в месяц), P – цена одной упаковки (тугриков).

А) Какую максимальную прибыль может получить предприятие от производства и продажи Фунгакрид?

Б) Министерство сельского хозяйства прогнозирует этим летом формирование стай саранчи. Чтобы помочь фермерам избежать потери урожая, Правительство приняло решение установить потолок цены на Фунгакрид, чтобы большее число фермеров смогли его приобрести, сократив, таким образом, использование опасных ядохимикатов.

Первый заместитель Министра сельского хозяйства предлагает установить потолок цен $P^I_{max} = 45$ тугриков за упаковку. Насколько возрастет количество проданных упаковок Фунгакрид при установлении потолка цен?

В) Второй заместитель Министра сельского хозяйства утверждает, что такого же объема продаж можно достичь и при более высоком потолке цен. Какой потолок цены P^{II}_{max} предлагает установить второй заместитель?

Г) Если бы вы были председателем Правительства, какой из двух предложенных вариантов предела цены вы выбрали? Приведите два аргумента в пользу вашего выбора (если будет приведено более двух аргументов, оценено будет только два первых).

Д) Министр сельского хозяйства считает, что ни один из предложенных вариантов не является удовлетворительным, потому что перед лицом надвигающейся угрозы важно обеспечить максимально возможный объем продаж средства. Возможно ли увеличить объем продаж на рынке средства Фунгакрид, изменив предел цены? Если это возможно, то определите верхний предел цены P_{max}, который обеспечит максимальный объем продаж Q_{max}, и сам этот объем продаж.

Решение:

А) $\pi = (80 - Q_M) \cdot Q_M - 70 - 20Q_M - 0.5{Q_M}^2 \to max$

Это парабола, ветви которой направлены вниз, следовательно, ее единственный экстремум является максимумом:

$$MR = 80 - 2Q_M = 20 + Q_M = MC \ \ \rightarrow \ \ Q_M = 20,\ P_M = 60, \pi = 530$$

Б) Поскольку потолок цены $P^I_{max} = 45$ меньше, чем оптимальная цена монополиста, то значит, P^I_{max} будет действовать как фиксированная цена. Тогда

$$\pi = 45 \cdot Q - 70 - 20Q - 0.5Q^2 \to max$$

Это парабола, ветви которой направлены вниз, следовательно, ее единственный экстремум является максимумом.

$$P^I_{max} = 45 = 20 + Q = MC \ \ \rightarrow \ \ Q = 25$$

Таким образом, чтобы максимизировать прибыль при фиксированной цене $P^I_{max} = 45$, предприятию следует производить 25 упаковок средства, при условии, что покупатели готовы купить это количество при данной цене. Однако, в условиях монополии спрос не является абсолютно эластичным, поэтому, принимая решение об объемах производства в условиях фиксированной цены, монополист должен проверить, готовы ли фермеры купить столько упаковок по цене 45 тугриков. Поскольку предприятие знает функцию спроса на свой продукт, это сделать просто: $Q_D = 80 - P = 80 - 45 = 35$, то есть все 25 упаковок будут проданы, и еще останется неудовлетворенный спрос, но предприятию производить большее количество средства Фунгакрид при такой цене не выгодно, так как это уменьшит его прибыль.

Ответ: продажи возрастут на 5 тыс. упаковок

В) Раз при цене 45 тугриков на рынке возникает дефицит, то при ее повышении величина спроса будет сокращаться, а оптимальный объем выпуска – возрастать (так как MC – возрастающая функция). Но как только величина спроса станет меньше, чем оптимальный объем выпуска, объем продаж будет определяться уже не объемом производства, а величиной спроса. Но тогда и объем производства будет определяться величиной спроса, поскольку производить продукцию, зная, что ее нельзя продать нерационально (по условию монополист знает функцию спроса). Поэтому может найтись и другая цена P_{max}^{II}, по которой будет также продано 25 упаковок, только на этот раз объем продаж будет определяться не количеством упаковок, которое готово произвести предприятие, максимизирующее прибыль, а объемом спроса.

$$Q_D = 80 - P = 25 \;\rightarrow\; P_{max}^{II} = 55$$

При $P_{max}^{II} = 55$ максимальную прибыль предприятие получит при производстве 35 упаковок средства, если все упаковки будут проданы:

$$\pi = 55 \cdot Q - 70 - 20Q - 0.5Q^2 \rightarrow max \;\rightarrow\; P_{max}^{II} = 55 = 20 + Q = MC \;\rightarrow Q = 35$$

Поскольку же монополист знает функцию спроса (по условию), он может определить, что продать при этой цене он сможет только 25 упаковок, а значит и производить он будет ровно это количество, чтобы не тратить ресурсы впустую. При фиксированной цене $P_{max}^{II} = 55$ такой объем производства обеспечит ему максимальную прибыль (функция прибыли возрастает при $0 \le Q \le 35$).

Ответ: $P_{max}^{II} = 55$ *тугриков.*

Г) Следует принять вариант второго заместителя, поскольку: 1) при цене 55 тугриков на рынке не возникнет дефицита, а значит нет стимулов к формированию теневого рынка средства, 2) прибыль производителя при цене 55 тугриков составит 492 500 тугриков, что более чем в 2 раза больше, чем прибыль при цене 45 тугриков (242 500 тугриков), что предпочтительнее, так как прибыль – источник развития производства. Недостаток этого решения – более высокие расходы фермеров. Но, согласно функции спроса, они готовы их нести.

Д) Исходя из пунктов Б) и В) при условии фиксированной цены P_{max} объем производства монополиста будет равен:

- объему, максимизирущему прибыль предприятия при фиксированной цене, если величина спроса при данной фиксированной цене превышает этот оптимальный выпуск, то есть будет определяться из условия $P_{max} = MC(Q),$ если $Q \le Q_D(P_{max})$;

либо

- величине спроса при заданной фиксированной цене, если оптимальный выпуск монополиста превышает величину спроса при этой цене, то есть будет определяться из условия $P_{max} = P_D(Q),$ если $Q > Q_D(P_{max})$.

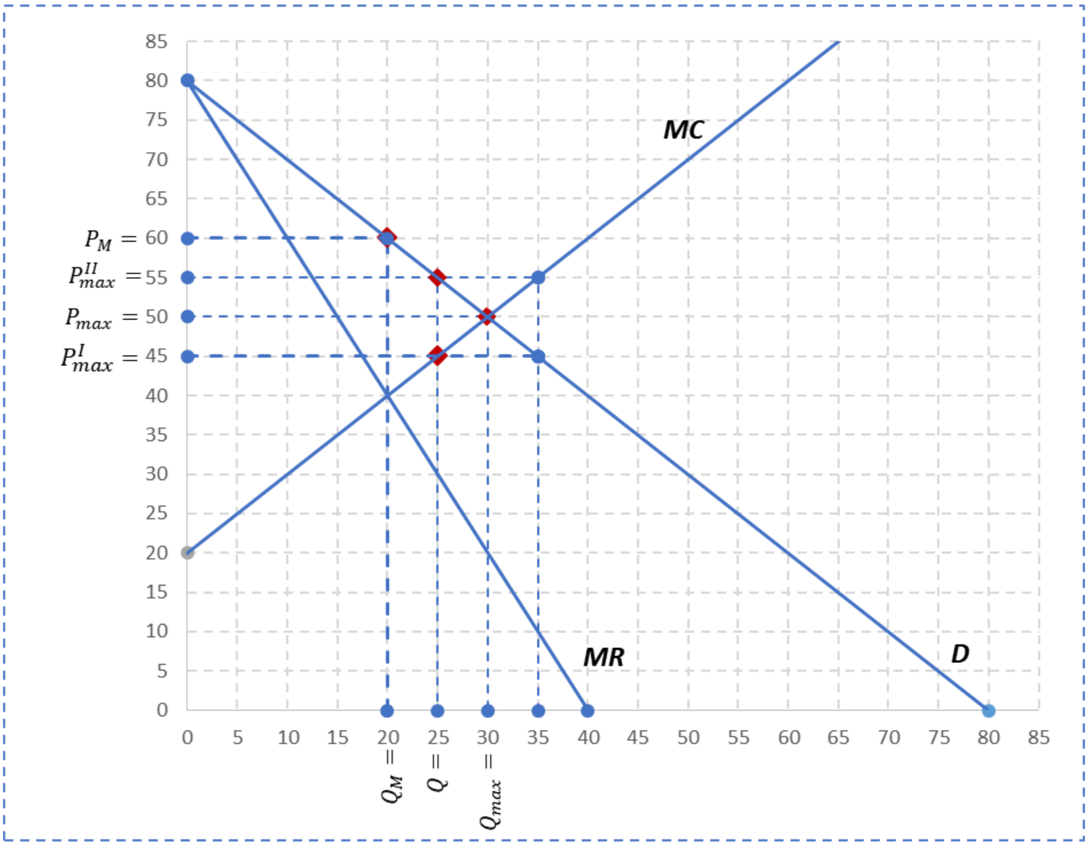
Для данной задачи это означает, что объем выпуска определяется из условия $P_{max} = 20 + Q,$ если $Q \le Q_D(P_{max})$ или из условия $P_{max} = 80 - Q,$ если $Q > Q_D(P_{max})$:

$$Q = \{P_{max} - 20,\ \ P_{max} - 20 \le 80 - P_{max}\ 80 -\ P_{max},\ \ P_{max} - 20 > 80 - P_{max}$$

Или, после преобразований:

$$Q = \{P_{max} - 20,\ \ P_{max} \le 50\ 80 -\ P_{max},\ \ P_{max} > 50$$

Очевидно, что объем выпуска монополиста Q возрастает при росте цены P_{max}, пока она не достигнет значения 50 тугриков, и затем начинает убывать. Следовательно, максимальный объем производства и продаж Q достигается при $P_{max} = 50$, а максимальное количество средства составляет $Q_{max} = 30$ тыс. упаковок.



Критерии

А) 3 балла	*Оптимальный объем производства монополиста*	*1 балл*
	Монопольная цена	*1 балл*
	Прибыль монополиста	*1 балл*
Б) 4 балла	*Обоснование, что предел цены будет действовать как фиксированная цена*	*1 балл*
	*верный ответ**	*3 балла*
В) 5 баллов	*верное значение альтернативного верхнего предела цены P^{II}_{max}**	
Г) 3 балла	*за слабый или неверный аргумент снимается 1-2 балла*	
Д) 5 баллов	*верный расчет предела цены P_{max} и соответствующего ему объема Q_{max}, в противном случае - 0 баллов*	
	при верном расчете предела цены P_{max} и отсутствии расчета объема Q_{max} пункт оценивается 3 баллами	

Отсутствие проверки достаточного условия достижения максимума функции прибыли приводит к потере 1 балла (однократно).
Арифметическая ошибка приводит к потере 1 балла.
** Если приведен только алгоритм без объяснения решения - весь пункт оценивается 1 баллом.*

Задача 4. Ореховый бизнес Бельчонка

Бельчонок решил заняться выращиванием орехов с золотыми и серебряными скорлупками. Вместе со своей мамой он приобрел для этого участок земли площадью 10 гектаров. В волшебной стране, где живет Бельчонок со своей мамой, орехи – это однолетняя культура, которую высевают весной, а осенью собирают урожай. Бельчонок узнал, что можно заключить форвардную сделку по продаже орехов – осенью ему гарантировано обещают заплатить за каждый центнер орехов с золотыми скорлупками по 10 тугриков, а за каждый центнер орехов с серебряными скорлупками по 5 тугриков.

Урожайность орехов очень сильно зависит от погодных условий:

- если лето будет жарким и сухим, то с одного гектара земли можно собрать 31 центнер орехов с золотыми скорлупками или 2 центнера орехов с серебряными скорлупками;
- если лето будет умеренным, то с одного гектара земли можно собрать 15 центнеров орехов с золотыми скорлупками или 10 центнеров орехов с серебряными скорлупками;
- если лето будет холодным и дождливым, то с одного гектара земли можно собрать 6 центнеров орехов с золотыми скорлупками или 52 центнера орехов с серебряными скорлупками.

А) Помогите Бельчонку заполнить следующую таблицу, используя данные задачи.

Выручка от продажи урожая орехов, в тугриках

Выращиваемая культура на всех 10 гектарах	Погодные условия		
	жаркое и сухое лето	**умеренное лето**	**холодное и дождливое лето**
орехи с золотыми скорлупками			
орехи с серебряными скорлупками			

Б) Если Бельчонок боится рисковать, то какой монокультурой он засеет весь участок земли и какой доход (выручку от продажи орехов) он при этом гарантировано получит?

В) Мама Бельчонка тоже не склонна рисковать, но она убедила Бельчонка, что гарантированная выручка может быть больше, и предложила такой вариант использования земли, при котором размер этой гарантированной выручки оказался бы максимальным. Рассчитайте, какова максимальная величина гарантированной выручки, и как при этом должна использоваться земля.

Г) После того, как Бельчонок засеял свой участок земли, следуя рекомендациям мамы, он встретил беличьих фей, которые сказали ему, что могут волшебным образом «организовать» любые погодные условия. Однако за это волшебство придется осенью заплатить N тугриков. Подумав, Бельчонок согласился. Укажите, какие погодные условия заказал Бельчонок, и рассчитайте диапазон значений для числа N, при которых такого рода сделка оказалась выгодна Бельчонку.

Решение

А) Заполнение таблицы не вызывает трудностей. Каждая клетка таблицы — это результат перемножения трех компонентов: площади земельного участка, урожайности соответствующей культуры и форвардной цены центнера этой культуры.

Выручка от продажи урожая орехов, ***в тугриках***

Выращиваемая культура *на всех 10 гектарах*	Погодные условия		
	жаркое и сухое лето	**умеренное лето**	**холодное и дождливое лето**
орехи с золотыми скорлупками	$10 \times 31 \times 10 = 3100$	$10 \times 15 \times 10 = 1500$	$10 \times 6 \times 10 = 600$
орехи с серебряными скорлупками	$10 \times 2 \times 5 = 100$	$10 \times 10 \times 5 = 500$	$10 \times 52 \times 5 = 2600$

Б) Если Бельчонок боится рисковать, то он сравнит минимальную выручку, которую можно получить, засеяв весь участок орехами с золотыми скорлупками (600 тугриков) с минимальной выручкой, которую можно получить, засеяв весь участок орехами с серебряными скорлупками (100 тугриков). Выбрав максимальное значение гарантированной выручки (600 тугриков), Бельчонок будет готов засеять весь участок земли орехами с золотыми скорлупками.

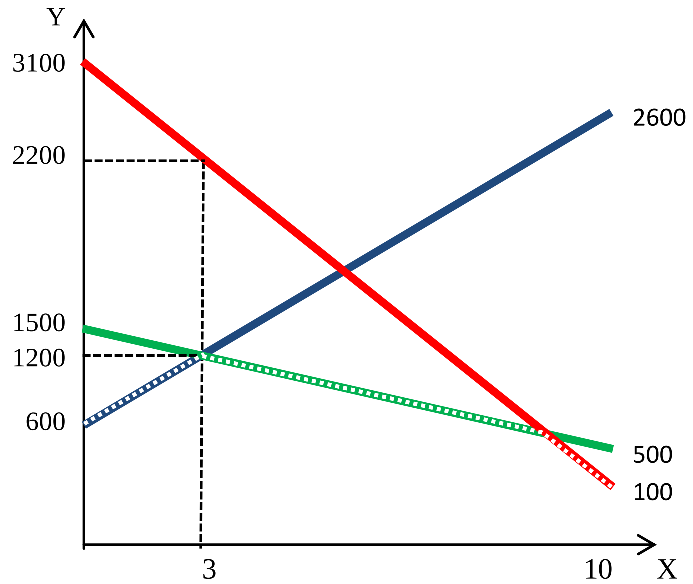
В) Введем обозначения. Пусть X – это количество гектаров земли, отводимое под орехи с серебряными скорлупками, а Y – это гарантированная выручка в тугриках.

Тогда для каждого варианта погодных условий можно записать неравенство: ожидаемая выручка больше или равна гарантированной выручки.

жаркое и сухое лето	$10X + 310 \times (10 - X) \geq Y$	$3100 - 300X \geq Y$
умеренное лето	$50X + 150 \times (10 - X) \geq Y$	$1500 - 100X \geq Y$
холодное и дождливое лето	$260X + 60 \times (10 - X) \geq Y$	$600 + 200X \geq Y$

Эта гарантированная выручка должна быть максимальной ($Y \to \max$).

Изобразив эти ограничения на графике, и проанализировав их взаимное расположение, легко получить искомый ответ: 3 гектара земли следует засеять орехами с серебряными скорлупками, а 7 гектаров земли орехами с золотыми скорлупками. Гарантированный доход (выручка) при этом окажется максимальной и составит 1200 тугриков. (Линия гарантированного дохода – это нижняя огибающая линий дохода.)



Г) Максимальная величина гарантированного дохода определяется в данном случае пересечением линий, соответствующих умеренному лету и холодному лету. Если же лето окажется жарким, то засеяв землю орехами в соответствии с советом мамы Бельчонка можно получить больший доход, а именно ($3100 - 300 \times 3 = 2200$ тугриков). Это больше величины гарантированного дохода на ($2200 - 1200 = 1000$ тугриков). Итак, Бельчонок попросит фей «организовать» жаркое лето, а за их содействие будет готов заплатить от 0 до 1000 тугриков.

Критерии

А) **3 балла** за корректную таблицу.

Если таблица составлена в расчете за гектар (все числа в 10 раз меньше), ставится **1 балл** из 3.

Если в таблице есть арифметическая ошибка, не повлиявшая на то, в какой ячейке находится наибольшее из минимальных значений выручки (орехи с золотыми скорлупками, холодное и дождливое лето), то **снимается 1 балл**.

Если в таблице есть арифметическая ошибка, повлиявшая на то, в какой ячейке находится наибольшее из минимальных значений выручки, то **снимается 2 балла**.

Б) **2 балла** за корректное определение максимума из минимумов выручки.

Если в пункте А) была допущена арифметическая ошибка, не повлиявшая на то, в какой ячейке находится наибольшее из минимальных значений выручки, и из ошибочных данных сделан корректный вывод, то баллы в пункте Б) не снимаются.

Если в пункте А) приведено решение в расчете на гектар и в пункте Б), следовательно, указан ответ «60 тугриков», то ставится **1 балл**.

В) 12 баллов за корректное решение, из них:

3 балла за идею о том, что участок можно засеять частично разными культурами.

3 балла за корректные функции выручки в зависимости от доли, отведенной на одну из культур (по 1 за каждую функцию).

6 баллов за корректное решение с определением оптимальной доли орехов с разными скорлупками (сопоставление значений функций выручки через график или аналитически через решение неравенств). При этом если в рассмотрении упущена одна из точек излома графика или (при аналитическом решении) не введено и не решено одно из неравенств, то ставится **4 балла** из 6 при условии правильного ответа.

Если участник приводит пример распределения видов орехов, когда гарантированная выручка больше 600, но этот пример не дает максимальной выручки (или дает, но это не доказано), то решение оценивается **от 5 баллов** (3 балла за идею о разных культурах и 2 балла за численный пример) до **8 баллов** (если есть еще корректные функции выручки).

Если приведено корректное целочисленное решение с полным перебором целого числа гектаров под каждую культуру, то за пункт ставится **7 баллов**.

Если перебор *неполный*, но среди вариантов есть такой, у которого минимальная выручка больше, чем в пункте Б) (в том числе правильный), то ставится **5 баллов** (как за пример, см. выше). При этом если неполному перебору, в рамках которого рассмотрен правильный вариант, сопутствует обоснование, почему нерассмотренные варианты не могут давать минимальную выручку выше, ставится **7 баллов** (как за полный перебор).

Если целочисленному решению (перебору) сопутствует иллюстрация единственности этого решения среди всех, а не только целочисленных, то за пункт ставится **12 баллов**.

Г) **3 балла** за корректное решение.

Если в пункте В) приведен только пример увеличения выручки при разделении участка, то в пункте Г) допускается ответ на вопрос в условиях этого (а не оптимального) разделения, баллы при этом не снижаются.

Задача 5. Парето-квартира

Иван и Маша купили квартиру и начали ее обустраивать. Объектом спора и несогласия стал торшер. Маша считает, что торшер должен стоять как можно ближе ко входу в квартиру, чтобы все пришедшие могли им любоваться. Иван считает, что торшер отвратительный и лучше бы он на глаза никому не попадался, чем ближе он расположен к северной стене в дальней комнате, тем лучше.

Напомним необходимые определения для решения этой задачи:

Сильная Парето-граница – множество альтернатив, при котором положение какого-либо игрока нельзя улучшить без ухудшения положения другого игрока.

Слабая Парето-граница - множество альтернатив, для которых положение всех игроков нельзя улучшить сразу.

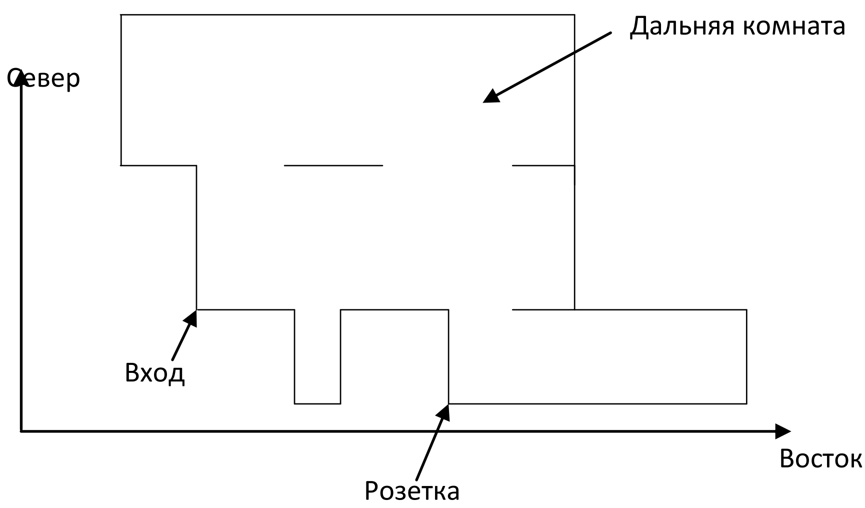
А) Изобразите несколько кривых безразличия для Ивана и Маши.

Б) Найдите слабую и сильную Парето-границу.

В) После подключения электропроводки, мастер Николай сказал, что лучше бы торшер стоял как можно ближе к розетке (чтобы не тянуть провод). Приведите пример хотя бы одной Парето-эффективной точки, т.е. точки, которая принадлежит либо слабой, либо сильной Парето-границе (с включением третьего игрока) или докажите, что их нет.

Г) Сама Парето-граница не позволяет однозначно разрешить конфликт и сказать, где же должен располагаться торшер. Необходим механизм выбора окончательной точки. Иван и Маша обратились к эксперту по дизайнам механизмов (к Вам) и просят помощи. Чтобы не обидеть ни Ивана, ни Машу, Вы предложили им случайный механизм. Предлагается подкинуть правильную монету 2 раза и посчитать долю количества выпавших «решек» относительно всех бросков, и расположить торшер в точке на сильной Парето-границе, которая разделила бы ее пропорционально полученному результату, начиная с точки расположения торшера, наиболее предпочтительной для Маши. Где в результате может быть расположен торшер?

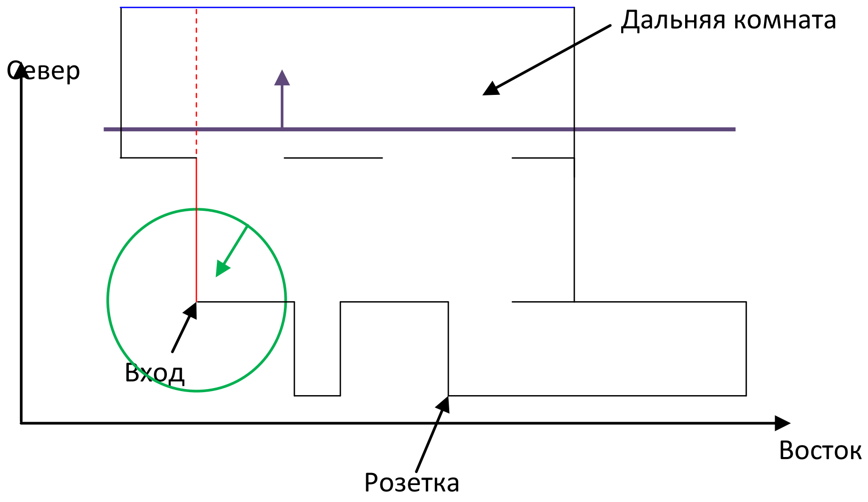
Планировка квартиры:



Решение:

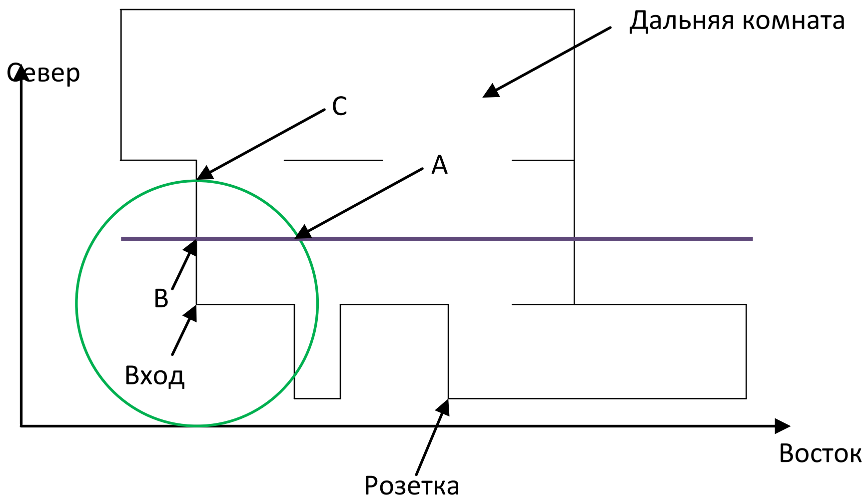
а-б)

Кривые безразличия Маши – окружности с точкой насыщения в точке «Вход». Ивана – прямые линии.
Синий цвет + красный цвет – слабое Парето.
Красный цвет – сильное Парето.
Планировка квартиры:



Ход рассуждений может быть следующим:

Возьмем произвольную точку «А» в квартире и проведем через нее кривые безразличия игроков:



Заметим, что образовалась область, в которой есть точки более предпочтительные для обоих игроков (фигура, образованная точками A,B,C). Эта область «подсказывает», где нужно искать Парето-оптимальные точки. Применив этот алгоритм для нескольких случайных точек можно выйти на общее решение (сильную Парето-границу). Слабая Парето-граница возникает только там, где один из игроков уже не может улучшать свою позицию. В нашем случае существует

явное ограничение для Ивана в виде северной стены, за нее уйти он не может, а вот Маша может переходить на новые кривые безразличия (уменьшать радиус окружности) и увеличивать свою полезность.
в) Третий игрок имеет такие же предпочтения, как и у Маши (кривые безразличия – окружности с точкой насыщения в точке «Розетка»). Довольно легко привести пример Паретовской точки: точка «Розетка». Действительно, если мы захотим улучшить состояние Маши и Ивана, то будем двигаться вертикально от «Розетки», а значит ухудшим положение электрика.
г) Формально необходимо построить случайную величину, которая принимала бы значения 0, 1/2 и 1 (возможная доля выпавших «решек»).
P(доля «решек» равна 0) = 0.5^3 = 0.125
P(доля «решек» равна 1) = 0.125, аналогично
Соответственно P(доля 1 «решки») = 0.75
Ожидаемое количество выпавших «решек» - математическое ожидание их возможного количества:
E[X] = 0*0.125 + (1/2)*0.75+ 1*0.125 = 0.5
Следовательно, стоит ожидать итогового расположения торшера в середине Сильной Парето-границы.
Торшер будет расположен либо в начале сильной Парето-границы (у входа), либо в середине сильной Парето-границы, либо в ее конце. Других вариантов нет.

Критерии:
 За изображение кривых безразличия Маши – 3 балла.
 За изображение кривых безразличия Ивана – 2 балла.
 За нахождение сильной Парето-границы – 5 баллов.
 За частичное ее нахождение – 3 балла.
 За нахождение слабой Парето-границы – 5 баллов.
 За упоминание о совпадении сильной и слабой Парето-границы – 3 балла (частичное нахождение).
 Если участник утверждает, что слабой Парето-границы нет, то подпункт оценивается в 0 баллов без снижения баллов за нахождение сильной Парето-границы.
 Если участник при построении Парето-границы вышел за границы квартиры, то соответствующий подпункт оценивается в 0 баллов.
 Приведен пример Парето-эффективной точки в случае 3-ех игроков – 3 балла.
 Правильно разбитая сильная Парето-граница в соответствии с найденными долями – 2 балла. Если точка, соответствующая доле 0.5 поставлена случайно и нигде не указано, что отрезок разбит пополам – 0 баллов.