

XXVIII Межрегиональный экономический фестиваль школьников
«Сибиряда. Шаг в мечту»
Олимпиада по экономике для учащихся 10х классов 3.03.2021
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП
Задания с решениями и критериями оценивания

Каждая задача оценивается из 20 баллов

Задача 1. Диета Бонифация



Пока лев Бонифаций на каникулах отдыхал в Африке у бабушки, директор цирка решил его порадовать и составить для него оптимальный рацион питания из отборного мяса и морской рыбы.

Каждый килограмм отборного мяса содержит 5 грамм макроэлементов (например, калий, магний, кальций, фосфор), 1 грамм микроэлементов (например, йод, цинк), 5 грамм витаминов и 4 грамма других полезных минеральных веществ. Килограмм морской рыбы также богат питательными веществами и содержит 3 грамма макроэлементов, 5 грамм микроэлементов, 9 грамм витаминов и 1 грамм минеральных веществ.

Ветеринар цирка подсказал директору, что Бонифаций и дальше будет продолжать радовать детей, если его ежедневный рацион будет содержать не менее 51 грамма макроэлементов, не менее 25 граммов микроэлементов, не менее 93 грамма витаминов и не менее 24 грамма минеральных веществ.

Килограмм мяса стоит на рынке 70 динаров, а морская рыба – целых 100 динаров за килограмм. Директор цирка хочет составить рацион Бонифация так, чтобы он продолжал радовать детей. С помощью какой минимальной суммы денег можно этого добиться? Сколько мяса и рыбы будет при этом приобретено?

Решение

Обозначим через x – количество мяса в килограммах, y – количество рыбы в килограммах. Суть решения состоит в том, чтобы на множестве достижимых объемов закупки выбрать точку, в которой общая стоимость приобретенных мяса и рыбы минимальна.

Фактически ставится следующая математическая задача:

- минимизируется стоимость:

$$TC = 70x + 100y \rightarrow \min$$

- ограничения задачи:

$$5x + 3y \geq 51 \text{ (макроэлементы)}$$

$$x + 5y \geq 25 \text{ (микроэлементы)}$$

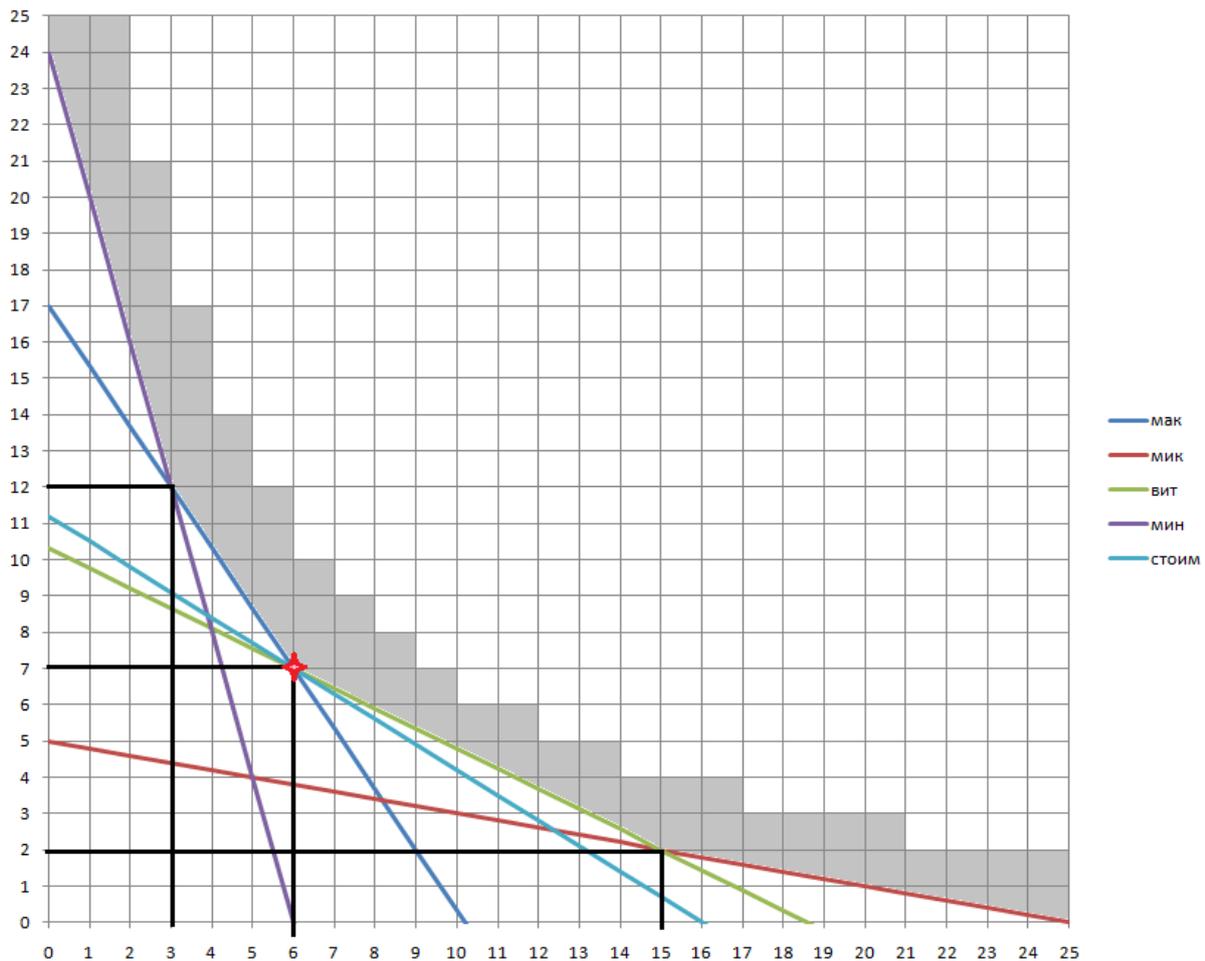
$$5x + 9y \geq 93 \text{ (витамины)}$$

$$4x + y \geq 24 \text{ (минеральные вещества)}$$

Каждое неравенство имеет следующий смысл. Если каждый килограмм мяса содержит 5 грамм макроэлементов, то в x килограммах мяса будет $5x$ грамм макроэлементов. В y килограммах рыбы будет $3y$ грамм макроэлементов. $5x + 3y$ – это общее количество макроэлементов, полученных Бонифацием, и эта величина должна быть не меньше установленной ветеринаром. Аналогично с остальными неравенствами.

Обе переменные должны быть неотрицательными, но *могут быть дробными!*

Все эти неравенства образуют «множество достижимых объемов закупок», изображенное на следующей картинке (по оси абсцисс – количество закупаемого мяса в кг, по оси ординат – количество рыбы в кг). Точки перегиба имеют координаты (сверху вниз): (0; 24), (3; 12), (6; 7), (15; 2), (25; 0).



Минимизация стоимости означает, что линия стоимости ($TC = 70x + 100y$) должна пройти как можно ниже и левее, и в то же время «касаясь» полученного множества.

Получается оптимум: точка (6; 7) – 6 килограммов отборного мяса и 7 килограммов морской рыбы – точка на пересечении линий (макроэлементы) и (витамины). То, что точка является оптимумом, **математически** подтверждается наклоном рассматриваемых линий:

наклон (макроэлементов) в уравнении $y = kx + b$ составит $-1,67$ (или $-5/3$);

наклон (микроэлементов) равен $-0,2$;

наклон (витаминов) равен $-0,56$ (или $-5/9$);

наклон (минеральных веществ) равен -4 ;

наклон (стоимости) равен $-0,7$ (находится между наклонами линий макроэлементов и витаминов: $-5/3 < -0,7 < -5/9$ или $-1,67 < -0,7 < -0,56$).

Стоимость набора и сумма, выделенная бухгалтером, составит $70*6+100*7=1120$ динаров.

Критерии оценивания

Балл за задачу складывается из трех частей: поиск оптимальной точки (**9 баллов**), объяснение, что точка оптимальна (**9 баллов**), расчет стоимости (**2 балла**).

При нахождении точки важно, чтобы из решения было понятно «почему точка получена «таким» способом» (например, почему для ее вычисления выбраны ограничения для «макроэлементов» и «витаминов»). Если такого объяснения нет, то ставится только **4 балла** из 9.

«Доказательство оптимальности» точки должно «охватывать» все возможные (даже не рассмотренные) комбинации производств.

Рисунок как доказательство принимается только, если он «построен точно» и все точки на нем отмечены. Если рисунок построен без соблюдения масштаба, то даже при наличии всех координат точек, такое «доказательство» оценивается только в **4 балла** из 9.

Логичное, но не полное (не охватывающее какие-либо варианты закупки) рассуждение об оптимальности точки также оценивается только в **4 балла** из 9.

Метод перебора и основанное на нем «доказательство» не может считаться полным, ведь объемы покупаемых продуктов могут быть дробными (указания на целочисленность переменных в условии нет, размерность переменных – в кг, а вес может быть дробным). Использование такого метода может быть оценено только в **2 балла** из 9.

Если выбранная точка одна, и про нее указано, что она оптимальная, но нет никакого объяснения, то такое «доказательство» оценивается в **0 баллов**.

Если полученная точка допустима, то расчет для нее стоимости засчитывается. Если точка – не допустима (не удовлетворяет ограничениям ветеринара по питательным веществам), то расчет стоимости не оценивается (**0 баллов**).

Общий критерий: за арифметическую ошибку, не приводящую к упрощению решения, снимается 1 балл. Если ошибка привела к существенному упрощению решения, то балл должен быть снижен в зависимости от «существенности упрощения».

Задача 2. Прогулки на теплоходе

Менеджер санатория «Сибирские зори» предложил на выходных организовать для отдыхающих прогулки-экскурсии на теплоходе по Оби и Обскому морю – в субботу прогулку «Мистическая Бердь», а в воскресенье прогулку «Шесть мостов Новосибирска». Он уже зафрахтовал для этого теплоход на 500 посадочных мест.

Изучение спроса отдыхающих на эти экскурсии показало, что спрос желающих прокатиться только в субботу описывается функцией $Q_c = 300 - 3P_c$, а спрос желающих прокатиться только в воскресенье функцией $Q_v = 2000 - 8P_v$, где Q_c и Q_v – это количество билетов на прогулки в субботу и воскресенье соответственно (в штуках), а P_c и P_v – это цены соответствующих билетов (в рублях).

1) Чтобы не запутаться, менеджер предложил билеты на субботнюю прогулку сделать синими, а на воскресную – красными. Определите, какие цены на каждый тип билетов должен установить менеджер, чтобы получить максимальную выручку от их продажи. Сколько при этом будет продано билетов и каких?

2) Неожиданно оказалось, что из-за отмены двухдневной автобусной экскурсии в Белокуриху появилась третья категория желающих попасть на прогулки по Оби и Обскому морю. Однако эти отдыхающие единогласно высказали пожелание: либо им продают билеты сразу на две экскурсии, либо они предпочтут другой вид отдыха. Спрос этой категории отдыхающих описывается функцией $Q_o = 1600 - 5P_o$, где Q_o – это количество билетов, дающих право сразу на две экскурсии (в штуках), а P_o – это цена такого билета (в рублях).

Учитывая появление новой категории желающих, менеджер думает пересмотреть ценовую политику и ввести еще один тип билетов – зеленые, которые дадут право отправиться сразу на обе экскурсии – и в субботу, и в воскресенье. (Все билеты именные, поэтому перепродажа их невозможна).

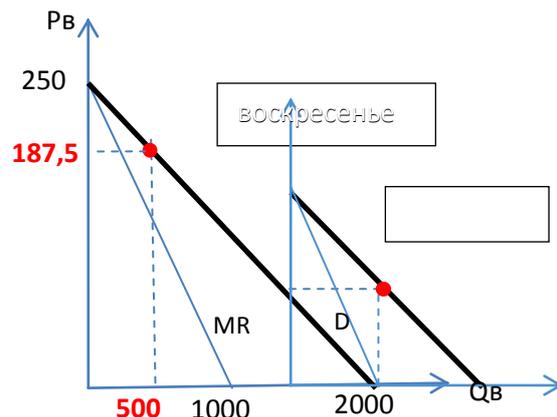
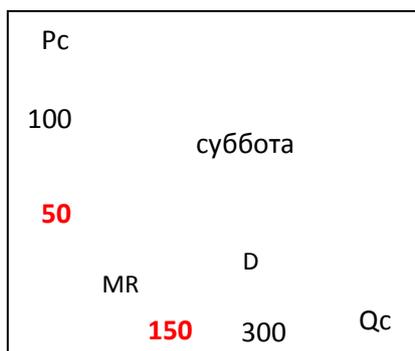
Определите, имеет ли смысл вводить новый тип билетов и если «да», то какие цены на каждый тип билетов теперь должен установить менеджер, чтобы получить максимальную выручку от их продажи. Сколько при этом будет продано билетов и каких?

Решение

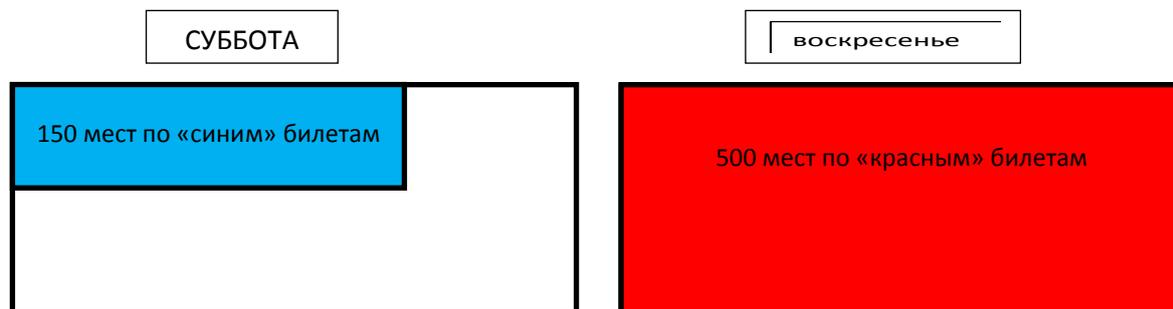
1) Решаем 2 стандартные задачи монополиста, максимизирующего выручку.

Для экскурсии в субботу предельный доход монополиста описывается функцией $MR_c = 100 - Q_c/1,5$. Максимум выручки монополист получит, если предельный доход окажется равен 0, т.е. когда $Q_c = 150$ билетов. При этом цену следует установить в соответствии с функцией спроса, т.е. $P_c = 50$ рублей.

Для экскурсии в воскресенье предельный доход монополиста описывается функцией $MR_v = 250 - Q_v/4$. Предельный доход равен 0, если $Q_v = 1000$. Однако мест на теплоходе всего 500. Значит, будет продано всего 500 билетов. Цену на них следует назначить в соответствии с функцией спроса 187,5 рублей.



На рисунке схематично показано, как при этом будет заполнен теплоход в субботу и воскресенье.

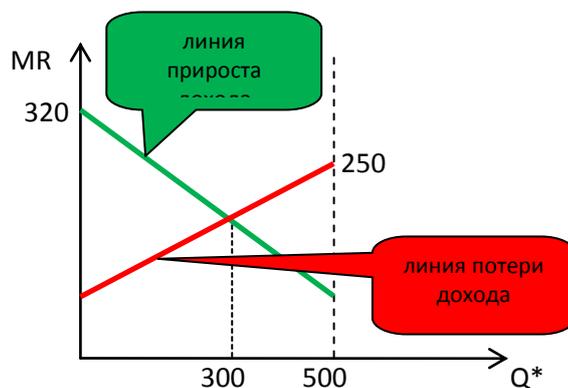


2) Воскресная прогулка пользуется повышенным спросом и, как показало решение 1), все места на теплоходе могут быть заняты теми, кто купит «красный» билет. Но можно, отказавшись продавать какое-то количество «красных» билетов, начать продавать «зеленые».

Увеличивать объем продаж «зеленых» билетов имеет смысл, пока прирост дохода от их продажи будет больше снижения дохода от сокращения объема продаж «красных» билетов. Учитывая, что предельный доход по «зеленым» билетам описывается функцией $MR_G = 320 - Q_G/2,5$ можно найти оптимальный объем такого замещения.

Пусть Q^* - это количество «зеленых» билетов, которые замещают «красные» билеты. Тогда на долю «красных» остается $(500 - Q^*)$ билетов. Увеличивать количество «зеленых» билетов будет выгодно, пока выполняется следующее соотношение $320 - Q^*/2,5 > 250 - (500 - Q^*)/4$. Решая это неравенство, получаем, что $Q^* < 300$. Значит больше 300 «зеленых» билетов продавать не следует.

Для наглядности покажем это на рисунке.

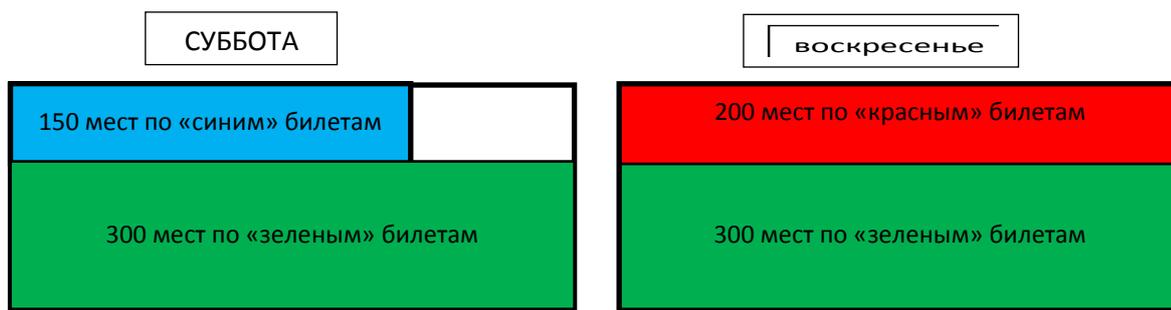


Однако «зеленые» билеты дают право на экскурсию и в субботу, поэтому следует проверить достаточно ли там свободных мест. Из пункта 1) мы знаем, что там оставалось еще $500 - 150 = 350$ мест, а это более чем достаточно.

В соответствии с функциями спроса теперь для «красных» билетов следует установить цену $(250 - 200/8) = 225$ рублей, для «зеленых» $(320 - 300/5) = 260$ рублей, а для «синих» билетов цену оставить прежней - 50 рублей.

Итак, с учетом появления новой категории покупателей для получения максимальной выручки менеджеру следует продать 150 «синих» билетов по цене 50 рублей, 200 «красных» билетов по цене 225 рублей и 300 «зеленых» билетов по цене 260 рублей.

Заполненность теплоходов при этом окажется следующей.



Ответ

1) Максимум выручки может быть получен от продажи 150 «синих» билетов по цене 50 рублей и 500 «красных» билетов по цене 187,5 рублей.

2) Максимум выручки может быть получен от продажи 150 «синих» билетов по цене 50 рублей, 200 «красных» билетов по цене 225 рублей и 300 «зеленых» билетов по цене 260 рублей.

Примечание Задача придумана на основе идеи задачи «Организация лекций» <https://iloveconomics.ru/z/2505>

Критерии

1) 5 баллов	<p>Определение цены и оптимального количества «синих» билетов – 2 балла.</p> <p>Определение цены и оптимального количества «красных» билетов – 3 балла.</p>
2) 15 баллов	<p>За расчет и обоснование оптимального количества зеленых билетов – 10 баллов.</p> <p>Определение цены и оптимального количества «синих» билетов – 1 балл.</p> <p>Определение цены и оптимального количества «красных» билетов – 2 балла.</p> <p>Определение цены и оптимального количества «зеленых» билетов – 2 балла.</p>

Задача 3. Целебная настойка

В маленьком Царстве-Государстве главной статьей экспорта является настойка из целебного корня долголетия. Спрос и предложение настойки в Царстве-Государстве описываются функциями $Q_D = 100 - 4P$ и $Q_S = 2P - 10$ соответственно (Q – количество настойки, тыс. бутылок, P – цена за бутылку, червонцев). Цена целебной настойки на мировом рынке настолько высока, что весь объем его производства в Царстве-Государстве – 50 тыс. бутылок – экспортируется (*мировой рынок является совершенно конкурентным*).

Чтобы жители Царства-Государства тоже могли покупать настойку из целебного корня, Министерство торговли ввело экспортную квоту (лицензию на вывоз настойки за пределы Царства ее производители получают бесплатно), в результате чего, отечественная настойка

начала поступать на внутренний рынок, а экспорт, хоть и сократился, но все равно в 2,5 раза превышает внутреннее потребление. В то же время сокращение экспорта привело к изменению курса червонца на 40% (цены червонца, выраженной в иностранной валюте).

Определите объем продаж настойки внутри страны и изменение общей выручки ее производителей в результате ограничения экспорта.

Решение

Если Царство экспортирует весь выпуск, значит мировая цена превышает резервную цену спроса («запретительную» цену спроса – цену, при которой покупатели отказываются покупать товар), а экспорт совпадает с объемом предложения. Поэтому мировую цену настойки можно определить из функции предложения: $50 = 2P - 10 \rightarrow P_w = 30$ червонцев. То есть до введения квоты доходы производителей от продажи настойки составляли $50 \cdot 30 = 1500$ тыс. червонцев.

Поскольку после введения квоты экспорт (QS-QD) в 2,5 раза превышает внутреннее потребление (QD), то внутренняя цена может быть определена из условия: $QS - QD = 2,5 \cdot QD \rightarrow 2P - 10 - 100 - 4P = 2,5 \cdot 100 - 4P \rightarrow P = 22,5$ червонцев. При этой цене объем внутреннего потребления составляет $QD = 100 - 4 \cdot 22,5 = 10$ тыс. бутылок, а квота составляет 25 тыс. бутылок.

Поскольку мировой рынок настойки является конкурентным, то изменение экспорта Царства-Государства не повлияет на цену мирового рынка (в иностранной валюте). При сокращении экспорта спрос на национальную валюту снижается, и она обесценивается, то есть один червонец стоит на 40% дешевле. Следовательно, цена настойки на мировом рынке, выраженная в червонцах, увеличивается. Тогда совокупные доходы производителей настойки составляют

$$TR = 10 \cdot 22,5 + 25 \cdot 300,6 = 1475 \text{ тыс. червонцев}$$

Изменение выручки продавцов равно $1475 - 1500 = -25$ тыс. червонцев

Критерии оценивания

доходы производителей до введения квоты	3 балла
объем продаж внутри страны после введения квоты	3 балла
внутренняя цена после введения квоты	3 балла
определение размера квоты	3 балла
цена мирового рынка, выраженная в червонцах, после изменения курса (числовое значение может быть и не определено, но записано, как оно рассчитывается, например, как в представленном варианте решения)	3 балла
выручка после введения квоты и изменение выручки	4+1 балла

Задача 4. Коалиция в кафе

Решение конфликтных ситуаций является важной частью управления любой компанией, тем более – для компании лучших друзей!

Три лучших друга Дэвид, Андрей и Рома решили сходить в кафе после очередного сложного экзамена. Так как они лучшие друзья, то они связаны серьезным обязательством – пить одинаковый напиток этим вечером! Но у ребят разные предпочтения, поэтому прежде чем позвать официанта и сделать заказ, они должны найти компромиссный вариант.

Удовлетворение, оцениваемое в условных баллах, которое получает каждый из ребят от каждого напитка указана в следующей таблице:

	Кофе	Квас	Морс	Чай	Лимонад	Сок
Дэвид	6	5	3	3	2	3
Андрей	3	2	6	2	4	1
Рома	3	6	2	5	1	6

Также эти ребята считают себя экспертами в теоретико-игровых моделях и утверждают, что точно знают, как делать выбор в такой непростой ситуации – надо воспользоваться принципом Парето! (Хотя если быть честным, они знают лишь определения.)

Слабый Парето-оптимум – это доступные альтернативы, выгоду от которых нельзя увеличить для всех игроков сразу (но можно для некоторых игроков, не уменьшая при этом выгоду остальных).

Сильный Парето-оптимум – это доступные альтернативы, выгоду от которых нельзя увеличить для кого-то из игроков, не снизив при этом выгоду какого-либо другого игрока.

Помогите компании лучших друзей определиться с выбором. Для этого:

1) Найдите альтернативы, составляющие слабый Парето-оптимум. Здесь и в последующих пунктах задания обязательно укажите, почему отвергнутые альтернативы не попали в соответствующие множества.

2) Усиьте решение 1 пункта, указав альтернативы, составляющие сильный Парето-оптимум.

3) Если сильный Парето-оптимум не позволит друзьям сделать однозначный выбор, предположите, что для того, чтобы исключить невыгодные для себя варианты напитка, ребята могут объединяться в коалиции по 2 человека. Любая коалиция из двух человек может заблокировать те варианты напитков, которые приносят каждому ее участнику удовлетворения меньше, чем 4 балла, игнорируя мнение третьего человека, не вошедшего в коалицию.

Ядром кооперативной игры называется набор альтернатив, которые ни одна коалиция не может заблокировать.

Найдите ядро данной кооперативной игры и укажите, какой напиток в итоге закажут ребята.

Решение

1,2) Видно, что для всех участников альтернатива «Лимонад» хуже альтернативы «Морс». Исключим ее.

	Кофе	Квас	Морс	Чай	Сок
Дэвид	6	5	3	3	3
Андрей	3	2	6	2	1
Рома	3	6	2	5	6

Определение слабого Парето оптимума можно разложить на 2 высказывания:

A - {это доступные альтернативы, выгоду от которых нельзя увеличить для всех игроков сразу}

B - {можно для некоторых игроков, не уменьшая при этом выгоду остальных}

Союз “но” интерпретируется как конъюнкция, а значит, альтернатива будет удовлетворять данному определению тогда и только тогда, когда удовлетворяет обоим условиям. А значит в множество слабого Парето входят альтернативы “Чай”, “Сок”.

Сильный Парето-оптимум: Кофе, Квас, Морс.

	Кофе	Квас	Морс
Дэвид	6	5	3
Андрей	3	2	6
Рома	3	6	2

Коалиция Рома&Андрей блокирует вариант «Кофе» (выигрыши: 4>3, 4>3). Коалиция Дэвид&Рома блокирует вариант «Морс». Вариант «Квас» не может быть заблокирован ни одной коалицией. Следовательно, это ядро игры.

Ребята закажут квас.

Критерии проверки:

- 1) Верно найден слабый Парето-оптимум - 4 балла.
- 2) Верно найден сильный Парето-оптимум - 8 баллов.
- 3) Верно найдено ядро кооперативной игры - 8 баллов.

Задача 5. Счастье без мухоморов

Среди жителей Лесной страны – лесных гномов – жульен из мухоморов пользуется повышенным спросом. Глава Гномпотребнадзора убежден, что необходимо ограничить потребление этого сомнительного с точки зрения пользы деликатеса. Поэтому он настаивает на вводе налога на продажу этого продукта. А Министр здравоохранения, ссылаясь на результаты исследований, утверждает, что сокращение потребления мухоморов значительно снизит уровень счастья жителей лесной страны. Согласно его данным, уровень счастья каждого потребителя жульена из мухоморов описывается функцией $U = 40x - 2x^2 + 4y$, где

U – уровень счастья (в баллах), x – количество жульена (кокотниц* в день), y – расходы на остальные блага (монет в день). Всего потребителей жульена 100, каждый из них ежедневно распределяет доход в 20 монет между жульеном и другими благами так, чтобы его счастье было максимальным каждый день.

После трех дней ожесточенных дебатов Министр финансов предложил ввести налог по ставке t монет на каждую продаваемую кокотницу с жульеном и из собранных средств выплачивать потребителям жульена компенсацию в размере, который восстановит их уровень счастья. Дневное предложение деликатеса описывается функцией $S = 25P$, где P – цена кокотницы с жульеном (монет), S – количество порций жульена, которое предлагают продавцы ежедневно на рынке всего (штук кокотниц). Поэтому он рассчитал такую налоговую ставку, при которой поступления от этого налога в казну будут максимальны.

Как и на сколько в итоге изменятся чистые доходы казны (то есть доходы за вычетом расходов) в результате реализации предложений Министра финансов, если все прочие доходы и расходы казны останутся неизменными?

* Кокотница – жаропрочная посуда, предназначенная для приготовления горячих закусок.

Решение

Расходы на остальные блага равны $y = 20 - p_x x$. А функция счастья может быть записана

$$U = 40x - 2x^2 + 4(20 - p_x x) = -2x^2 + (40 - 4p_x)x + 80$$

Это парабола, ветви которой направлены вниз, ее максимум достигается при $x = \frac{40 - 4p_x}{4} = 10 - p_x$. Это и есть функция спроса одного потребителя на жульены. А спрос всех потребителей может быть представлен $X_D = 1000 - 100P$.

Министр максимизировал налоговые поступления tX , где $t = P_D - P_S = (10 - 0.01 \cdot X) - X/25$.

$$tX = \left((10 - 0.01 \cdot X) - \frac{X}{25} \right) \cdot X = -0.05X^2 + 10X$$

Это парабола, ветви которой направлены вниз, и ее максимальное значение достигается при $X = \frac{10}{0.1} = 100$. Следовательно $t = P_D - P_S = (10 - 0.01 \cdot 100) - \frac{100}{25} = 5$.

Таким образом, доходы бюджета составят 500 монет.

Теперь определим необходимый размер дотации. Он должен компенсировать потери счастья от сокращения потребления жульена.

Определим уровень счастья до введения налога. $X_D = X_S \rightarrow 1000 - 100P = 25P$

То есть до введения налога продавалось 200 кокотниц жульена по цене 8 монет. Значит каждый покупатель приобретал 2 кокотницы в день. А на остальные блага он тратил $20 - 8 \cdot 2 = 4$. Его уровень счастья $U_1 = 40 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 4 = 88$

После введения налога каждый покупатель платит $10 - 0.01 \cdot 100 = 9$ монет и покупает $10 - 9 = 1$ кокотницу в день. Его уровень счастья $U_2 = 40 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2 + 4(20 - 9 \cdot 1) = 82$

Поскольку потребление жульена не зависит от дохода, вся компенсация (паушальная субсидия) пойдет на оплату других товаров и услуг (y). Чтобы уровень счастья вернулся к прежнему уровню, y должен вырасти на $(88 - 82)/4 = 1,5$, такую компенсацию и следует заплатить. Значит, общие расходы казны на компенсацию составят 150.

То есть бюджет получит $500 - 150 = 350$ монет дополнительного дохода.

Ответ: чистые доходы казны увеличились на 350 монет

Критерии оценивания

индивидуальная функция спроса	5 баллов
рыночная функция спроса	2 балла
налоговая ставка	4 балла
доходы бюджета от введенного налога	2 балла
расчет компенсации	5 баллов
изменение чистых доходов казны	2 балла