

Олимпиада школьников «Высшая проба»

Решения и критерии проверки

9 класс

Задание 1. «Онлайн-вклады»

Приведем возможные причины разницы в процентах по «очным» и онлайн-вкладам.

1. **«Снижение издержек»**. Отсутствие необходимости физического проведения операций, связанных с открытием онлайн-вклада, снижает издержки, связанные с функциональной деятельностью банка по открытию и обеспечению таких вкладов. Фактически, банки предлагают две разные услуги (обычный вклад и онлайн-вклад), осуществление которых связано с различными предельными издержками. Цены на такие услуги различаются.
2. **«Ценовая дискриминация»**. Поскольку условия вкладов, открытых лично или через онлайн-сервис, одинаковы за исключением цены предоставляемой услуги, можно считать, что банк, начисляя разный процент на депозит, осуществляет ценовую дискриминацию. Тем самым он привлекает новых клиентов, которые не готовы нести издержки, связанные с открытием вклада при личном присутствии в отделении банка, и не готовы оформить даже онлайн-вклад по «очному» проценту.
Последний аргумент является существенным. Открытие онлайн-вкладов значительно снижает издержки для той группы людей, у которых высоки альтернативные издержки, связанные с использованием свободного времени. Для тех людей, которые ценят удобство открытия онлайн-вкладов, нет смысла повышать процент по вкладу, они согласились бы и на меньший, по сравнению с «очным», процент по депозиту, что, безусловно, было бы выгодно банку. Однако банк повышает процент, а не снижает его, что преследует своей целью привлечь именно новых клиентов, тех, кто не готов класть деньги на депозит дистанционно даже по «очному» проценту. Поскольку повышение процента привлекает всех клиентов банка, которые готовы пользоваться интернет-сервисом, а не только тех, у кого высоки альтернативные издержки использования свободного времени, и поскольку у банка нет возможности идентифицировать клиентов и предлагать им разные проценты по вкладам, разница в процентах по «очному» вкладу и онлайн-вкладу не может быть значительной.
3. **«Плата за риск»**. Возможность осуществлять онлайн-вклады появилась в России относительно недавно. Большое количество людей относится с недоверием к подобному вложению средств. Чтобы стимулировать их принять решение в пользу онлайн-вкладов (что, в свою очередь, может снижать операционные

издержки банка) банки предлагают им более выгодные условия по депозитам. При отсутствии повышенной ставки такие клиенты отказались бы осуществлять онлайн-вклады. Таким образом, повышая процент по вкладу, банк оплачивает риск недоверчивых клиентов. По указанной в предыдущем пункте причине разница в процентах по «очному» вкладу и онлайн-вкладу не может быть значительной.

Критерии проверки:

- Аргументированно раскрыта любая одна из указанных причин — **10 баллов**.
- Аргументированно раскрыта любая другая причина из указанных причин — **15 баллов**.
- Аргументы в пользу самого онлайн-сервиса (интернет банкинга), а не в пользу разницы в процентах для «очного» и онлайн-вклада оценивались в **0 баллов**.
- Если один из аргументов был раскрыт неполностью, что указывалось в комментариях при проверке, то в этом случае за указанную причину ставилось **5 баллов**.

Задание 2. «Три тарифа»

Представим издержки при использовании каждого из тарифов как функцию от x и y :

$$f_1(x, y) = 5x + 3y \text{ (3 б.)}; \quad f_2(x, y) = 2x + 7y \text{ (3 б.)}; \quad f_3(x, y) = 8x + y \text{ (3 б.)}.$$

Попарно сравним эти издержки:

$$1) \quad f_1(x, y) \leq f_2(x, y) \Leftrightarrow 5x + 3y \leq 2x + 7y \Leftrightarrow 3x - 4y \leq 0. \text{ (2б.)}$$

$$2) \quad f_1(x, y) \leq f_3(x, y) \Leftrightarrow 5x + 3y \leq 8x + y \Leftrightarrow 3x - 2y \geq 0. \text{ (2б.)}$$

$$3) \quad f_2(x, y) \leq f_3(x, y) \Leftrightarrow 2x + 7y \leq 8x + y \Leftrightarrow x - y \geq 0. \text{ (2б.)}$$

Таким образом, тариф «Обычный» не хуже двух других на множестве

$$\left\{ (x, y) \mid \frac{3x}{4} \leq y \leq \frac{3x}{2}, 0 \leq x, y \leq 1000 \right\},$$

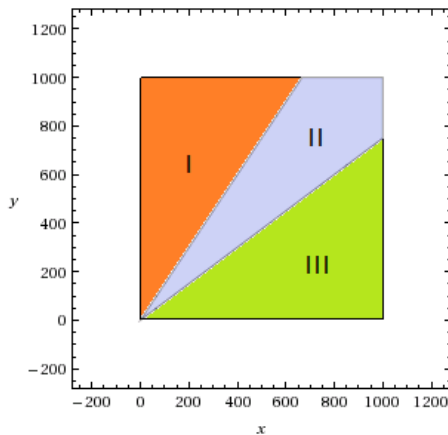
тариф «Новогодний» не хуже двух других на множестве

$$\left\{ (x, y) \mid y \leq \frac{3x}{4}, 0 \leq x, y \leq 1000 \right\},$$

тариф «Рождественский» не хуже двух других на множестве

$$\left\{ (x, y) \mid y \geq \frac{3x}{2}, 0 \leq x, y \leq 1000 \right\}.$$

Если выписаны все три множества, то это оценивается в **10 б.**



На плоскости (x, y) области оптимальности тарифов выглядят так, как показано на рисунке. В области I оптимальным является тариф «Рождественский», в области II оптимальным является тариф «Обычный», в области III оптимальным является тариф «Новогодний». На границе областей I и II самыми выгодными тарифами являются «Рождественский» и «Обычный», а на границе областей II и III самыми выгодными тарифами являются «Обычный» и «Новогодний».

Критерии проверки:

- Верно указаны функции издержек при использовании тарифов — **3 балла** за каждую функцию
- Верно указаны неравенства, описывающие оптимальность одного из тарифов — **2 балла** за каждую систему неравенств
- Правильно найдены и изображены на рисунке все области оптимальности тарифов; верно указаны прямые, разделяющие эти области; указано, что на прямых оптимальными являются сразу два тарифа — **10 баллов**
- Верно разобранный частный случай (например, на прямой $x = y$) — **2 балла** (но не более 6 баллов в совокупности)
- Арифметическая ошибка — **-1 балл**
- Неверно указана область на рисунке (но верно посчитана) — **-1 балл**
- Неверно посчитана и указана область на рисунке — **-3 балла**

Задание 3. «Опрос»

а) Каждый из предложенных вариантов имеет свои недостатки. В правильном решении должен быть выбран один или несколько вариантов и сделаны необходимые пояснения и уточнения, демонстрирующие, что решающий понимает ограничения и проблемы выбранного метода и может предложить пути их решения.

Чтобы наиболее точно измерить средние расходы на пирожные в городе N-ске, нужно, чтобы, с одной стороны, доля жителей каждого из районов среди опрошиваемых как можно больше соответствовала доле жителей каждого района в городе. С другой стороны, внутри каждой из групп средние результаты должны быть максимально близки к средним расходам по району. Благодаря закону больших чисел средний результат по случайной выборке с большой вероятностью будет близок к истинному среднему результату по всей административной единице.

В первом варианте (опросить 500 посетителей рынка) выборка может быть сильно смещена, поскольку, во-первых, на рынок может ходить больше людей из района, в котором он расположен. Во-вторых, основными покупателями на рынке могут быть потребители, сильно отличающиеся от среднего жителя. Например, покупателями на рынке могут быть те, кто больше заботится о здоровье, или те, кто имеет соответствующий социально-экономический статус и уровень доходов. В обоих случаях смещенность выборки может влиять на средние расходы на пирожные.

Во втором варианте (опросить всех жильцов одной случайно выбранной многоэтажки из Спального района, двух домов из Центра и одной улицы из Частного сектора) тоже может получиться смещенная выборка (ответ зависит от количества жильцов в каждом из домов): доля опрошенных по каждому из районов (от числа всех опрошенных) может не соответствовать доле жителей, проживающих в этом районе (от числа всех жителей в городе). Например, если среди опрошиваемых окажется 300 жителей Спального района, 150 жителей Центра и 50 жителей Частного сектора, то получится следующий результат. В Частном секторе проживает $2/(100+10+2) \approx 1.7\%$ от всех жителей города, но среди опрошенных их будет $50/(300+150+50) = 10\%$ (от всех опрошенных). Если в разных районах расходы на пирожные существенно различаются (а этого разумно ожидать, поскольку в указанных районах скорее всего живут люди с разным социально-экономическим статусом), это приведет к тому, что среднее по такой выборке не будет равняться среднему по всему городу. Например, если предположить, что в Центре расходы на пирожные на одного человека в среднем составляют 5 тыс. рублей в месяц, в Спальном районе 2 тыс. рублей в месяц и в Частном секторе 10 тыс. рублей в месяц, то средние расходы по городу составят

$$5 \cdot \frac{10000}{112000} + 2 \cdot \frac{100000}{112000} + 10 \cdot \frac{2000}{112000} \approx 2,41 \text{ тыс. руб./мес.},$$

а по нашей выборке (в среднем):

$$5 \cdot \frac{300}{500} + 2 \cdot \frac{150}{500} + 10 \cdot \frac{50}{500} = 4,6 \text{ тыс. руб./мес.}$$

Такое расхождение в результатах свидетельствует о потенциально плохом качестве опроса.

Наконец, в третьем варианте (разместить опрос на популярной в N-ске странице в социальной сети) на вопрос ответят только посетители этой страницы. Ясно, что эта выборка вероятнее всего не будет хорошей моделью населения города. Она будет заведомо смещена в сторону молодежи (представить себе пенсионера, не имеющего учетной записи в социальной сети гораздо проще, чем не пользующегося ей студента). Помимо этого, хотя доступ к интернету сегодня есть почти у всех, он положительно связан с доходом (то есть самые бедные с меньшей вероятностью ответят на вопрос). Исправить этот недостаток, перевзвесив результаты, весьма сложно, поскольку при проведении онлайн-опроса становится затруднительным определение социально-демографических характеристик респондентов (не у всех будут указаны даже место проживания и возраст; у тех, у кого эти данные указаны, невозможно проверить их достоверность). Таким образом, этот метод также имеет свои недостатки.

Если выйти за рамки предложенных методов, то можно предложить модификацию второго: либо скорректировать квоту по каждому району, так, чтобы она соответствовала доле жителей этого района во всём городе (то есть опросить 446 человек из Спального района, 45 человек из Центра и 9 человек из Частного сектора), либо использовать исходную выборку, но скорректировать результат, посчитав отдельно средние по каждому из районов, а затем сложив их с весами, равными доле населения соответствующего района во всём городе: то есть (в нашем примере выше) результат по Спальному району умножить на $100/112 \approx 0,89$, результат по Частному сектору умножить на $2/112 \approx 0,02$ и результат по Центру умножить на $10/112 \approx 0,09$, и все сложить.

Ответ: ответом может быть любой из методов при достаточном обосновании, поскольку каждый из предложенных вариантов имеет свои недостатки.

б) Если нас интересует среднее по каждому из районов, то оптимальным является второй подход. Как обсуждалось выше, третий подход скорее всего даст искаженную информацию, которую, к тому же, будет сложно соотнести с местом проживания. Первый подход тоже не является оптимальным: он больше подвержен случайности. Например, может так случиться, что в результате случайного выбора наберется совсем мало респондентов из Частного сектора и в этом случае данные по этому району будут очень ненадежны (вдруг нам случайно попадет один человек и он окажется большим сладкоежкой?).

Первый и третий варианты также могут быть оценены максимальным баллом, если предложен способ модернизации опроса, содержащий разумное квотирование.

Ответ: второй метод (или модифицированные первый и третий).

Критерии проверки:

Пункт а)

Максимум: 13 баллов.

1. Ответ 1 («Рынок»).

- (a) При полном обосновании: **13 баллов**. Из обоснований должно быть понятно, почему выбран именно этот вариант, а не другие. Правильное решение должно содержать рассуждения, каким-либо образом отвечающие на проблему смещенности выборки: может быть, те, кто ходит на рынок, едят меньше или больше пирожных, чем в среднем жители города.
- (b) Только рассуждение вида «Придут жители всех районов», без обсуждения альтернатив: **5 баллов**.
- (c) Если есть рассуждение вида «Придут жители всех районов», а также обоснованно исключена одна из альтернатив: **7-8 баллов**.
- (d) Утверждение о пропорциональном представительстве всех районов на рынке без обсуждения репрезентативности с точки зрения вопроса о пирожных (вдруг на рынок ходят только те, кто сидит на диете и не ест пирожных?): **10 баллов**.
- (e) Если исключен только один вариант (например, вариант 3): **5 баллов**.

2. Ответ 2 («Выборка по районам»).

Строго говоря, это неверный ответ: результат может быть сильно смещен, поскольку квоты по районам не соответствуют числу жителей в районах, а районы явно различаются по социально-экономическим и демографическим характеристикам. Тем не менее, можно предложить разумные доводы в пользу этого варианта или даже сделать из него верный (но это требует дополнительных соображений), см. ниже.

- (a) Идея о необходимости представительности всех районов (это уменьшает дисперсию, если считать, что районы сильно разные между собой и при этом однородные — представьте, что у вас есть три одинаковых по числу жителей, но сильно разных, района, и вы хотите опросить ровно трёх жителей — тогда их лучше выбирать по одному из района, чем случайно по городу): **5 баллов**.
- (b) Если дополнительно к предыдущему пункту предъявлено рассуждение о том, что можно получить правильный результат о среднем по городу, правильно взвесив результаты: **13 баллов**.

3. Ответ 3 («Опрос в социальной сети»).

Это неверный ответ. Обычно **0 баллов** (см. также раздел «Отдельные соображения» ниже)

Пункт б)

Максимум: 12 баллов

1. Ответ 1 («Рынок»).

- (a) Если приведены какие-то разумные соображения, за них могут быть назначены **3-4 балла** (см. раздел «Отдельные соображения» ниже)

(b) Если есть мысль о разумном квотировании, чтобы в каждом из районов было опрошено достаточное количество людей: **12 баллов**.

2. Ответ 2 («Выборка по районам»).

(a) При полном обосновании: **12 баллов**. Из обоснований должно быть понятно, почему выбран именно этот вариант, а не другие.

(b) Исключение первого метода на основании того, что мы не знаем, сколько человек из какого района (то есть предполагается, что мы не умеем спрашивать в ходе опроса, из какого района респондент), является полностью валидным.

3. Ответ 3 («Опрос в социальной сети»).

(a) Если приведены какие-то разумные соображения, за них могут быть назначены **3-4 балла** (см. раздел «Отдельные соображения» ниже).

(b) Если есть мысль о разумном квотировании, чтобы в каждом из районов было опрошено достаточное количество людей: **12 баллов**.

Отдельные соображения

1. Только ответ без каких-либо объяснений: **0 баллов** (за любой пункт).

2. Из обоснований должно быть понятно, почему выбран именно этот вариант, а не другие. Если исключен только один вариант: **5 баллов** (вне зависимости от пункта)

3. Проводить опрос в социальных сетях дешево: **4 балла**.

4. В социальных сетях представлены все, поэтому выборка будет репрезентативной: **2 балла**.

5. Замечание о недостатке опроса в социальной сети, состоящее в том, что голосовать могут жители других городов: **1 балл**

6. Мелкие ошибки в рассуждениях или не слишком существенная невнимательность влечет штраф в **2 балла**.

7. Предложен и обоснован новый метод, не описанный в условии, но не противоречащий условию. Он может быть оценен наравне с альтернативами, перечисленными в условии, вплоть до выставления полного балла.

8. Различные разумные соображения по ходу решения, не являющиеся решением, могут быть оценены, но не более чем в **3-4 балла**.

Задание 4. «Маскилон»

Сначала решим задачу монополиста на каждом из двух рынков без учета транспортных ограничений. На рынке космических кораблей «Маскилон» максимизирует функцию прибыли

$$\pi_k = (100 - q_k)q_k - q_k^2 - 2q_k = -2q_k^2 + 98q_k$$

Максимальное значение квадратичной функции с отрицательным старшим коэффициентом достигается в точке $q_k^* = 24,5$ (**3 балла**).

На рынке ракет-носителей «Маскилон» максимизирует функцию прибыли

$$\pi_p = (40 - q_p)q_p - 4q_p = -q_p^2 + 36q_p$$

Максимальное значение этой квадратичной функции с отрицательным старшим коэффициентом достигается в точке $q_p^* = 18$ (**3 балла**).

С учетом ограничения транспортных мощностей «Маскилону» нет смысла производить более 20 космических кораблей или более 10 ракет-носителей. Значит, оптимальный с учетом транспортных ограничений уровень выпуска на каждом из двух рынков будет лежать на участке возрастания прибыли на соответствующем рынке. Отсюда следует, что в оптимуме «Маскилон» полностью задействует свои транспортные мощности (**7 баллов**).

Пусть «Маскилон» производит n ракет-носителей. Тогда, так как задействуются все транспортные мощности, он произведет $2(10-n)$ космических кораблей. При таком уровне выпуска товаров общая прибыль фирмы будет равна

$$\pi = -n^2 + 36n - 2(2(10 - n))^2 + 98 \cdot 2(10 - n) = -9n^2 + 1160$$

При неотрицательных n функция прибыли убывает по n . Значит, «Маскилон» производит 0 ракет-носителей и 20 космических кораблей (**12 баллов**).

Критерии проверки:

Задачу можно было решать разными способами. Например, в некоторых работах были попытки решить задачу с помощью перебора. В любом случае, решение разбивается на два крупных фрагмента: доказательство того, что транспортные мощности «Маскилона» задействуются полностью, и поиск оптимального выпуска на множестве, когда транспортные мощности полностью задействованы. Первая часть решения приносила **13 баллов**, вторая — **12 баллов**.

- Корректный перебор значений прибыли по всем наборам товаров, при которых полностью задействуются транспортные мощности фирмы, приносил **12 баллов** за вторую часть решения.
- Если в задаче монополиста нет объяснения, почему точка экстремума является точкой максимума, за это всякий раз снимался **1 балл**.

- Если в задаче монополиста допускалась арифметическая ошибка, за это снималось **2 балла**.
- Если делался вывод о том, что нужно производить только один вид товаров без вычисления общей прибыли или без другого обоснования, после чего получался правильный ответ, то за вторую часть решения ставились **2 балла** из 12.