ПрОШ - 2022

Решения задач
Второй тур. Задачи. 9 класс
22-23 января 2022 г.

Задача 1. Рыбный остров (30 баллов)

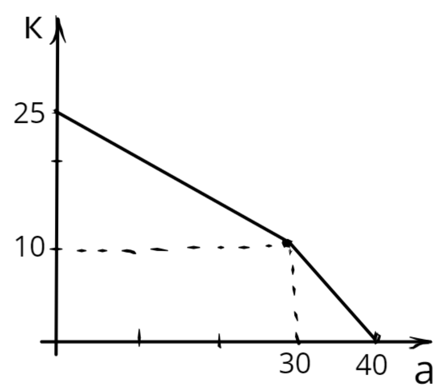
В одной морской стране производят карасей и анчоусы. Страна разделена на два региона. В первом регионе могут максимально произвести 10 тонн карасей или 10 тонн анчоусов с постоянными альтерантивными издержками. Во втором регионе же – 15 тонн карасей или 30 тонн анчоусов, также с постоянными альтернативными издержками.

а) (15 баллов) Если караси и анчоусы потребляются комплектами из двух тонн карасей и одной тонны анчоусов, то сколько таких комплектов будет производиться в оптимуме?

б) (15 баллов) Пусть технология производства карасей во втором регионе изменилась. Теперь максимально могут произвести 20 тонн карасей или 30 тонн анчоусов (с новыми постоянными альтернативными издержками). Сколько комплектов из двух тонн карасей и одной тонны анчоусов теперь будет производиться в оптимуме?

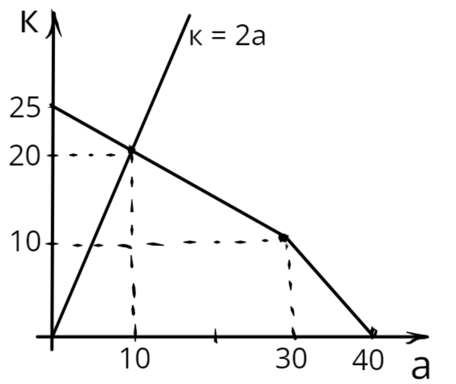
Решение

а) Альтернативные издержки производства 1 тонны карасей в первом регионе: $AC_y = 1$, а во втором регионе – $AC_y = 2$. Максимально два региона вместе могут произвести 25 тонн карасей или 40 тонн анчоусов. Построим КПВ, руководствуясь тем, что альтернативные издержки возрастают с ростом объёмов производства. Тогда первый (слева-направо) участок КПВ будет соответствовать второму региону, а второй участок КПВ – первому региону.



То, что караси и анчоусы потребляются комплектами из двух тонн карасей и одной тонны анчоусов, можно формализовать следующим уравнением: $y = 2x$, где x – анчоусы в тоннах, а y – караси в тоннах.

Чтобы найти оптимальное потребление карасей и анчоусов, достаточно пересечь КПВ и уравнение, задающее пропорцию потребления. Сначала построим прямую $y = 2x$ на нашем графике КПВ.

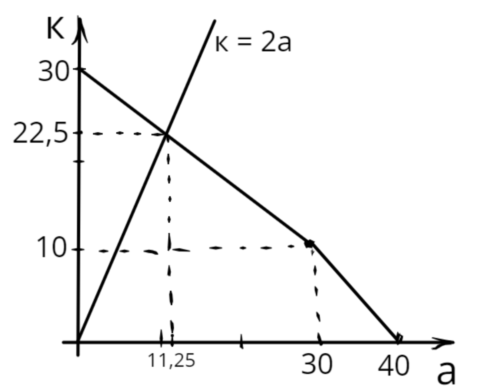


Видно, что прямая пересекает КПВ на первом участке. Уравнение первого участка КПВ: $y = 25 - 0{,}5x$. Приравниваем: $2x = 25 - 0{,}5x$ и получаем, что $x = 10$, $y = 20$. Значит в оптимуме будет производится 10 комплектов.

Ответ: 10 комплектов.

б) Аналогично пункту а) найдем альтернативные издержки производства карасей и построим КПВ, а затем снова построим на том же графике прямую $y = 2x$.

Альтернативные издержки производства карасей в первом регионе не изменились: $AC_y = 1$, а во втором регионе стали равны: $AC_y = 1{,}5$. Строим КПВ и прямую $y = 2x$ на одном графике:



Уравнение первого участка КПВ: $y = 30 - \frac{2}{3}x$. Приравниваем: $30 - \frac{2}{3}x = 2x$ и получаем, что $x = 11{,}25$, $y = 22{,}5$. Значит теперь в оптимуме потребляется 11,25 комплектов.

Ответ: 11,25 комплектов.

Задача 2. Сезонный продукт **(30 баллов)**

Зимой спрос и предложение на городском рынке пирожков с голубикой задаются, соответственно, функциями $Q_d(P) = 100 - P$ и $Q_W(P) = 3P$. Летом предложение пирожков падает до $Q_{S_1}(P) = P$, потому что голубика растёт только в холодном климате. Но локальные производители освоили новую технологию выращивания голубики летом, поэтому предложение с недавних пор падает лишь до $Q_{S_2}(P) = 2P$. Новая технология не понравилась государству, поэтому её запретили. Но столь важный рынок, решило государство, не должен оставаться без внимания. Оно решило повысить спрос на рынке до $Q_g(P) = 2a + Q_d(P)$, причём при этом тратится a^2 денежных единиц из бюджета.

а) (5 баллов) Определите изначальные равновесные цену и количество на рынке пирожков с голубикой зимой и летом до появления новой технологии.

б) (3 балла) Какие цена и количество складывались бы на рынке летом, если бы государство не запрещало новую технологию?

в) (15 баллов) Определите оптимальное значение a, если государство хочет максимизировать общественное благосостояние, которое включает в себя благосостояние потребителей, производителей и самого государства.

г) (7 баллов) Получится ли у государства достичь того же уровня общественного благосостояния, как в случае, если бы оно не запрещало новую технологию выращивания голубики?

Решение

а) Зимой спрос задаётся функцией $Q^d = 100 - P$, а предложение: $Q^s = 3P$. Равновесию соответствует точка пересечения кривых спроса и предложение. Аналитически нам нужно просто приравнять их уравнения: $100 - P = 3P \Longrightarrow P^*_w = 25$, $Q^*_w = 100 - 25 = 75$.

Летом спрос задаётся функцией $Q^d = 100 - P$, а предложение до появления новой технологии имеет вид $Q^s = P$. Тогда равновесие: $100 - P = P \Longrightarrow P^*_{s_1} = 50$, $Q^*_{s_1} = 50$.

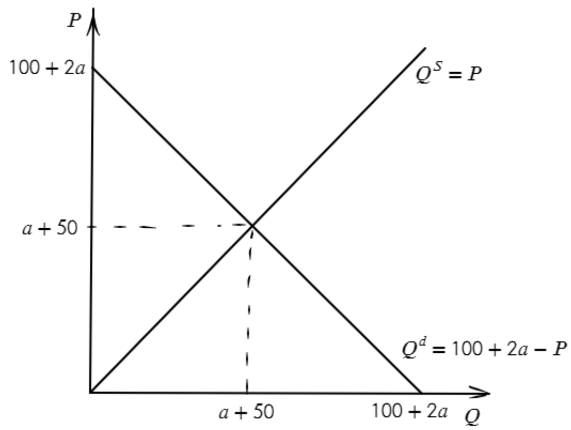
Ответ: зимой равновесная цена 25, а равновесное количество – 75; летом до появления новой технологии равновесная цена 50, а равновесное количество – 50.

б) С появлением новой технологии до вмешательства государства предложение имело вид: $Q^s = 2P$. Тогда равновесие: $100 - P = 2P \Longrightarrow P^*_{s_2} = \frac{100}{3}$, $Q^*_{s_2} = \frac{200}{3}$.

Ответ: равновесная цена $\frac{100}{3}$, равновесное количество – $\frac{200}{3}$.

в) 1. Первый вариант решения:

Условие можно было понять так, что государство своими закупками увеличивает спрос на $2a$ при каждом значении цены. Тогда спрос будет иметь вид $Q^d = 100 + 2a - P$, а предложение – $Q^s = P$. Равновесие на этом рынке: $100 + 2a - P = P \Longrightarrow P^* = 50 + a$, $Q^* = 50 + a$. Изобразим спрос и предложение на графике:



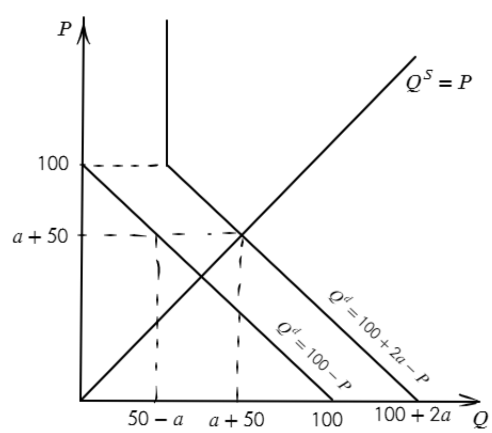
Общественное благосостояние – это сумма излишка потребителей, излишка производителей и излишка государства. Графически излишек потребителей – это площадь треугольника, ограниченного кривой спроса и прямой, соответствующей равновесной цене, а излишек производителей – площадь треугольника, ограниченного кривой предложения и прямой, соответствующей равновесной цене. Излишек государства в данном случае это просто его расходы, то есть $-a^2$. Таким образом, общественное благосостояние имеет вид: $SW = 0{,}5\cdot(a+50)(2a+100-a-50)+0{,}5\cdot(a+50)(a+50)-a^2 = a^2+100a+2500-a^2 = 100a+2500$. Видно, что общественное благосостояние возрастает по a, а значит, если государство старается максимизировать общественное благосостояние, то будет выбирать как можно большее значение a. Поскольку a никак не ограничено, оптимальный выбор государства: $a \longrightarrow +\infty$.

Ответ: $a \longrightarrow +\infty$

2. Второй вариант решения:

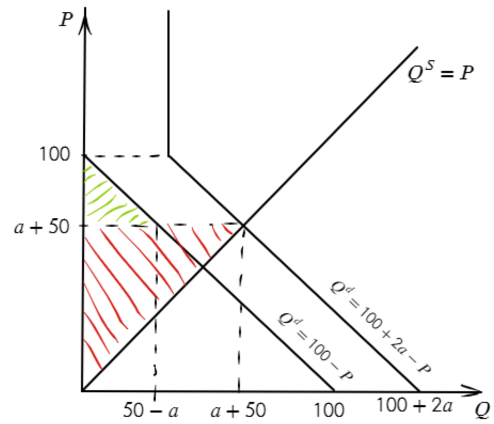
На самом деле государство не может увеличить спрос на константу при любом значении цены. Если цена поднимется выше максимальной цены, которую готовы платить потребители (в нашем случае это 100), то спрос будет предъявлять только государство на уровне $2a$, т.е. при $P > 100$ мы будет иметь вертикальный участок спроса $Q = 2a$. При этом равновесие у нас будут при: $100 + 2a - P = P \Longrightarrow P^* = a + 50$, $Q^* = a + 50$.

В этом случае общественное благосостояние – это всё ещё сумма излишка потребителей, излишка производителей и излишка государства, однако графически они будут считаться немного иначе. Изобразим спрос и предложение на графике:



Излишек производителей графически – это площадь треугольника, ограниченного кривой предложения и прямой, соответствующей равновесной цене, а излишек потребителей

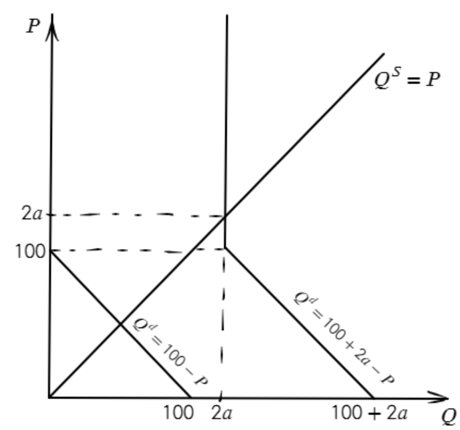
– это площадь треугольника, ограниченного кривой спроса (только участком, соответствующим самим потребителям, а не государству и потребителям) и прямой, соответствующей равновесной цене. Для удобства заштрихуем эти фигуры на графике:



Зелёным цветом заштрихован треугольник, соответствующий излишку потребителей, красным цветом – треугольник, соответствующий излишку производителей. Излишек государства составляет $-a^2$.

Таким образом, общественное благосостояние имеет вид: $SW = 0{,}5 \cdot (50 - a)(100 - a - 50) + 0{,}5 \cdot (a + 50)(a + 50) - a^2 = 2500$. В этом случае общественное благосостояние постоянно и равно 2500.

Однако, если государство закупит достаточно много пирожков с голубикой, цена вырастет настолько, что потребители больше не будут покупать этот товар. Графически эта ситуация выглядит так:



Произойдёт это в том случае, если закупки государства, то есть $2a$ превысят 100, т.е. при $a > 50$. В этом случае равновесие складывается при $P^* = 2a$, $Q^* = 2a$. Излишек потребителей в этом случае равен 0, поскольку они не покупают пирожки с голубкой совсем, а излишек производителей будет равен $0{,}5 \cdot 2a \cdot 2a = 2a^2$. Тогда общественное благосостояние имеет вид: $SW = 2a^2 - a^2 = a^2$. Видно, что при любом положительном a общественное благосостояние бесконечно возрастает с ростом a. Поскольку государство стремится сделать общественное благосостояние как можно выше, оно выберет бесконечно большое a и, соответственно, бесконечно большое общественное благосостояние.

Ответ: $a \longrightarrow +\infty$

г) Если бы государство не запрещало новую технологию, то общественное благосостояние составило бы: $SW = 0{,}5 \cdot \frac{200}{3}(100 - \frac{100}{3}) + 0{,}5 \cdot \frac{200}{3} \cdot \frac{100}{3} = \frac{10000}{3}$. В случае запрета технологии, но наличия государственных закупок, общественное благосостояние стремится к бесконечности. Таким образом, государству удалось значительно увеличить общественное благосостояние.

Ответ: да, получится.

Задача 3. Организаторы организуют (30 баллов)

Кирилл и Гоша занимаются экспериментами и выдают мерч в каморке. За 2 часа Кирилл может сделать 20 экспериментов или выдать 40 единиц мерча (а также любую их линейную комбинацию). Гоша, соотвественно, 80 экспериментов или 20 единиц мерча. Оба этих занятия эффективно распределены между ребятами. Мерч и эксперименты делаются специально для Мишы, функция полезности которого задаётся уравнением: $U = min\{x, y\}$, где x – количество единиц мерча, а y – количество экспериментов.

а) (12 баллов) Найдите, сколько единиц мерча и экспериментов будет потреблять Миша и проиллюстрируйте ваше решение на графике (начертите карту кривых безразличия и покажите выбор оптимальной точки).

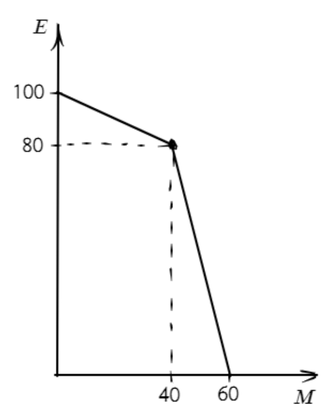
б) (8 баллов) Пусть про удивительные товары (эксперименты и мерч) узнал Антон и стал потреблять эти товары вместо Мишы. Его функция полезности задаётся уравнением: $U = -x^2 + 8{,}5x + y$. Сколько мерча и экспериментов потребит Антон?

в) (10 баллов) Выведите функцию спроса Антона на мерч (в зависимости от цены на мерч), если цена эксперимента равна 1 тыс. руб.

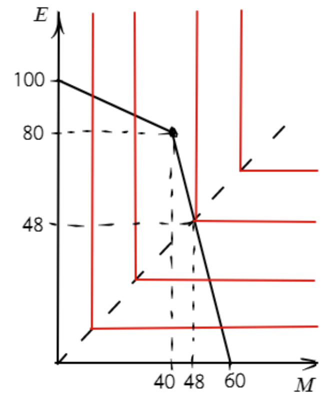
Решение

Начнём с того, что в условии указана производительность Кирилла и Гоши за 2 часа работы. Этот факт необязательно использовать при решении, однако, если участники делили объёмы производства на 2 и решали всю задачу с этиими числами, баллы не снижались. Здесь же приведём решение для объёмов производства за 2 часа.

а) Альтернативная стоимость производства экспериментов для Кирилла: $AC_e^K = 2$, альтернативная стоимость производства экспериментов для Гоши: $AC_e^G = 0{,}25$. Суммарно Кирилл и Гоша могут произвести 100 экспериментов или 60 единиц мерча. Построим кривую производственных возможностей Гоши и Кирилла, руководствуясь тем, что альтернативная стоимость производства растёт с ростом объёмов производства.



Функция полезности Миши $U = minx, y$. Такая функция полезности соответствует комплементарным товарам, кривые безразличия имеют вид «уголков», вершины которых располагаются на прямой $y = x$. Оптимальной точкой будет являться точка, в которой пересекаются КПВ Гоши и Кирилла и кривая безразличия Миши. Искомой кривой безразличия в данном случае будет являться та, которая имеет ровно одну точку пересечения с КПВ. Изобразим карту кривых безразличия, КПВ и оптимальную точку на одном графике:



Видно, что оптимальная точка находится на втором (слева-направо) участке КПВ. Уравнение этого участка: $y = 240 - 4x$. Приравняем уравнение второго участка КПВ и прямой $y = x$: $240 - 4x = x \Longrightarrow x^* = 48$, $y^* = 48$. Таким образом, в оптимуме будет потребляться по 48 единиц мерча и экспериментов.

Ответ: 48 единиц мерча и 48 экспериментов.

б) Здесь стоит рассмотреть два случая.

1. Первый случай: оптимум находится на первом (слева-направо) участке КПВ.
   Уравнение первого участка КПВ: $y = 100 - 0{,}5x$, $x \in [0, 40]$. Подставим это в полезность Антона и промаксимизируем её.

$$U_1 = -x^2 + 8{,}5x + 100 - 0{,}5x = -x^2 + 8x + 100 \longrightarrow \max_{x \in [0,40]}$$

   Функция полезности имеет вид параболы ветвями вниз, поэтому максимум – в вершине.

$$x^* = \frac{8}{2} = 4 \in [0, 40],\ y^* = 98$$

$$U_1^* = -16 + 32 + 100 = 116$$

2. Второй случай: оптимум находится на втором (слева-направо) участке КПВ.
   Уравнение второго участка КПВ: $y = 240 - 4x$, $x \in [40, 60]$. Подставим это в полезность Антона и промаксимизируем её.

$$U_2 = -x^2 + 8{,}5x + 240 - 4x = -x^2 + 4{,}5x + 240 \longrightarrow \max_{x \in [40,60]}$$

   Функция полезности имеет вид параболы ветвями вниз, поэтому максимум – в вершине.

$$x_{\text{в}} = \frac{4{,}5}{2} = 2{,}25 \notin [40, 60]$$

   Видно, что вершина параболы не принадлежит промежутку, значит выбираем граничную точку промежутку, ближайшую к координате вершине, это – $x = 40$, тогда найдём полезность:

$$U_2^* = -1600 + 180 + 240 = -1180$$

Во втором случае полезность, очевидно, меньше, чем в первом, значит оптимальные объёмы потребления мерча и экспериментов найдены в первом случае.

Ответ: 4 единицы мерча и 98 единиц экспериментов.

в) Запишем бюджетное ограничение Антона в общем виде: $P_x \cdot x + P_y \cdot y \leqslant I$, где P_x, P_y – цены мерча и экспериментов соответственное, а I – доход Антона. С учётом данных из условия можем переписать бюджетное ограничение Антона в следующем виде: $P_x \cdot x + y \leqslant I$ или $y \leqslant I - P_x \cdot x$. Заметим, что если $y < I - P_x \cdot x$, мы может немного увеличить y и уменьшить x, при этом увеличив полезность, поэтому неравенство можно заменить на равенство. Тогда подставим бюджетное ограничение в полезность Антона и промаксимизируем:

$$U = -x^2 + 8{,}5x + I - P_x \cdot x = -x^2 + (8{,}5 - P_x)x + I \longrightarrow \max_{0 \leqslant x \leqslant \frac{I}{P_x}}$$

Функция полезности имеет вид параболы ветвями вниз, поэтому максимум – в вершине.

$$x^* = \frac{8{,}5 - P_x}{2}$$

Заметим, что если $P_x > 8{,}5$, то товар x становится слишком дорогим, и Антон перестаёт его покупать, т.е. $x^* = 0$, $P_x > 8{,}5$. С другой стороны, если расходы на товар x в оптимуме превышают доход Антона, то он будет потреблять ровно $x^* = \frac{I}{P_x}$, $\frac{8{,}5-P_x}{2} > \frac{I}{P_x}$.

Таким образом, спрос на мерч состоит из трёх участков:

$$x^d = \begin{cases} 0, & P_x > 8{,}5 \\ \frac{8{,}5-P_x}{2}, & P_x \leqslant 8{,}5,\ \frac{8{,}5-P_x}{2} \leqslant \frac{I}{P_x} \\ \frac{I}{P_x}, & \frac{8{,}5-P_x}{2} > \frac{I}{P_x} \end{cases}$$

Задача 4. Eco-friendly (9, 10, 11 классы) **(30 баллов)**

В городе Врн компанией «Pirelli» организовано производство автомобильных покрышек. Спрос на покрышки имеет вид $Q_d = 100 - P + 20\beta$, где P – цена покрышек, а коэффициент β определяет степень экологичности производства. $\beta = 1$, если производство экологичное, и $\beta = 0$ в ином случае (то есть может принимать только эти два значения). Функция издержек фирмы также зависит от β и имеет вид: $TC = (1 + \beta)Q^2 + 100 + 50\beta$.

а) (10 баллов) «Pirelli» является монополистом на рынке покрышек в городе Врн. Определите, какое β выберет фирма, какой объем продукции произведет и какую прибыль получит.

б) (2 балла) Какой размер аккордной субсидии должно выплатить фирме государство, чтобы производство стало экологичным? Считайте, что если фирме безразлично, делать заводы экологичными или нет, она будет делать первое. Государство выплачивает субсидию только тем фирмам, которые заботятся об экологии!

в) (18 баллов) Теперь правительство региона взяло «Pirelli» под свой контроль и само выбирает коэффициент β. Оно руководствуется интересами общества и максимизирует совокупную функцию полезности $U = \sqrt{\beta} + \pi$, где π – прибыль фирмы. Взаимодействие между государством и компанией устроено так: сначала государство выбирает значение β, а затем фирма выбирает объем производства. Какое значение β установит государство?

Решение

а) Запишем обратную функцию спроса: $P^d = 100+20\beta-Q$. Теперь можем записать функцию прибыли монополиста:

$$\Pi = (100 + 20\beta)Q - Q^2 - (1 + \beta)Q^2 - 100 - 50\beta = -(2 + \beta)Q^2 + (100 + 20\beta)Q - 100 - 50\beta \longrightarrow \max_{Q\geqslant 0}$$

Функция прибыли имеет вид параболы ветвями вниз относительно Q, поэтому максимум – в вершине.

$$Q^* = \frac{100 + 20\beta}{2(2 + \beta)}$$

Подставим найденное оптимальное количество обратно в прибыль:

$$\Pi = -\frac{(2 + \beta)(100 + 20\beta)^2}{4(2 + \beta)^2} + \frac{(100 + 20\beta)^2}{2(2 + \beta)} - 100 - 50\beta = \frac{(100 + 20\beta)^2}{4(2 + \beta)} - 100 - 50\beta$$

Сравним прибыли при $\beta = 0$ и $\beta = 1$:

$$\Pi(\beta = 0) = \frac{100 \cdot 100}{4 \cdot 2} - 100 = 1250 - 100 = 1150$$

$$\Pi(\beta = 1) = \frac{120 \cdot 120}{4 \cdot 3} - 100 - 50 = 1200 - 150 = 1050$$

Очевидно, $\Pi(\beta = 0) > \Pi(\beta = 1) \Longrightarrow \beta^* = 0$, $\Pi^* = 1150$, $Q^* = \frac{100}{4} = 25$.

Ответ: $\beta^* = 0$, $Q^* = 25$, $\Pi^* = 1150$.

б) Аккордная субсидия просто прибавляется к прибыли, как константа. Для того, чтобы фирме было выгодно выбрать экологичное производство, должно выполняться неравенство: $\Pi(\beta = 0) \leqslant \Pi(\beta = 1) + S$, где S – размер субсидии. Подставив числа из предыдущего пункта, получим:

$$1150 \leqslant 1050 + S \Longrightarrow S \geqslant 100$$

Ответ: при субсидии больше или равной 100.

в) Оптимальный выбор объёма производства в зависимости от β не изменится, поэтому прибыль в зависимости от β имеет вид: $\Pi = \frac{(100+20\beta)^2}{4(2+\beta)} - 100 - 50\beta$. Тогда совокупная функция полезности имеет вид:

$$U = \sqrt{\beta} + \frac{(100 + 20\beta)^2}{4(2 + \beta)} - 100 - 50\beta$$

Сравним полезности при $\beta = 0$ и $\beta = 1$:

$$U(\beta = 0) = \frac{100 \cdot 100}{4 \cdot 2} - 100 = 1150$$

$$U(\beta = 1) = 1 + \frac{120 \cdot 120}{4 \cdot 3} - 100 - 50 = 1051$$

Видно, что $U(\beta = 0) > U(\beta = 1)$, поэтому государство выберет $\beta^* = 0$,

Ответ: 0.