ПрОШ - 2022

Решения задач
Второй тур. Задачи. 7-8 классы
22-23 января 2022 г.

Задача 1. Давным-давно в далёкой-далёкой галактике (30 баллов)

В далёкой-далёкой вселенной есть две планеты: Банания, где есть только бананы, и Авокадия, где есть только авокадо. Известно, что на Банании есть 20 бананов, из каждого банана они могут произвести либо одну велосипедную раму, либо четыре колеса (жители всех остальных планет недоумевают, как это у них получается). Также известно, что на Авокадии есть 20 авокадо, из каждого авокадо они могут произвести либо две велосипедные рамы, либо одно колесо (жители остальных планет также недоумевают). Межгаллактическое правительство решило построить мост между планетами и объединить их в одно государство. Сколько велосипедов они смогут произвести, если для каждого велосипеда требуется одна рама и два колеса?

Решение

В Банании альтернативная стоимость производства одной велосипедной рамы составляет $AC^{\text{Б}}_{\text{рамы}} = 4$, в Авокадии же альтернативная стоимость производства одной велосипедной рамы равна $AC^{\text{А}}_{\text{рамы}} = 0{,}5$. Видно, что альтернативная стоимость производства велосипедных рам в Авокадии ниже, чем в Банании, значит Авокадия будет специализироваться на производстве рам, а Банания – на производстве колёс.

Всего в Авокадии могут произвести 40 велосипедных рам (если не будут производить колёса совсем), а в Банании всего могут произвести 80 колёс (опять же, если совсем не будут производить рамы). Так как для одного велосипеда нужна одна рама и два колеса, всего произведут 40 велосипедов.

Ответ: 40 велосипедов.

Задача 2. Самый лучший стартап (30 баллов)

Предприниматель Артём решил продавать пряжу. Цена, по которой он продаёт моток пряжи равна 4, а закупает он такой моток по цене 2. К сожалению, больше чем 50 мотков пряжи в день никто у Артёма не покупает. Известно, что пряжа берётся не из воздуха, её нужно привозить на фуре и хранить. Фура может привезти любое количество мотков пряжи, а пряжу, которую привезли в тот же день можно сразу продавать, не храня. Стоимость заказа одной фуры равна 100, а стоимость хранения одной единицы товара в день равна 1. Какую максимальную среднюю прибыль в день может получать Артём?

Решение

Если Артём продаёт моток пряжи в тот же день, когда его привезли, то зарабатывает по: $4 - 2 = 2$ единицы с каждого мотка. Если мотки полежали одни день на складе, то он заработает с каждого: $4 - 2 - 1 = 1$. Если же пряжа пролежала на складе два дня, то Артём заработает: $4 - 2 - 1 - 1 = 0$ с каждого мотка. Таким образом, нет никакого смысла хранить пряжу два или более дней на складе.

В случае, когда Артём принимает решение ничего не хранить на складе, он получает 2 единицы прибыли с каждого проданного мотка. Так, он заработает: $50 \cdot 2 - 100 = 0$. Если же Артём хранит пряжу одни день и продает часть в тот же день, то получает прибыль: $(4-2) \cdot 50 + (4-2-1) \cdot 50 - 100 = 50$ за два дня работы. Таким образом, максимальная средняя прибыль в день будет составлять: $50 : 2 = 25$.

Ответ: 25.

Задача 3. Рыбный остров **(30 баллов)**

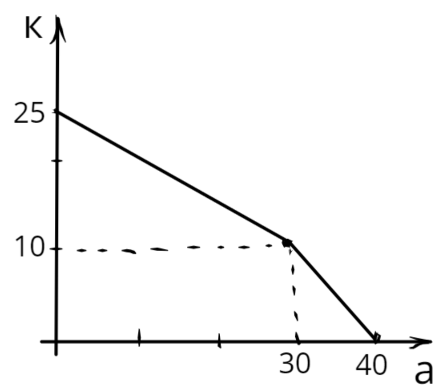
В одной морской стране производят карасей и анчоусы. Страна разделена на два региона. В первом регионе могут максимально произвести 10 тонн карасей или 10 тонн анчоусов с постоянными альтерантивными издержками. Во втором регионе же – 15 тонн карасей или 30 тонн анчоусов, также с постоянными альтернативными издержками.

а) (15 баллов) Если караси и анчоусы потребляются комплектами из двух тонн карасей и одной тонны анчоусов, то сколько таких комплектов будет производиться в оптимуме?

б) (15 баллов) Пусть технология производства карасей во втором регионе изменилась. Теперь максимально могут произвести 20 тонн карасей или 30 тонн анчоусов (с новыми постоянными альтернативными издержками). Сколько комплектов из двух тонн карасей и одной тонны анчоусов теперь будет производиться в оптимуме?

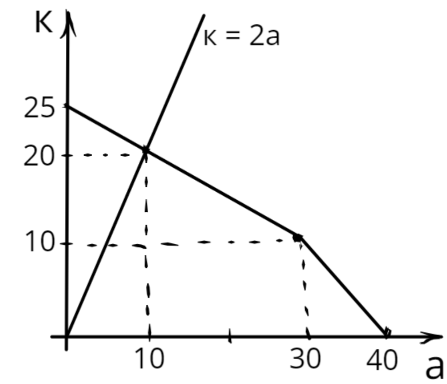
Решение

а) Альтернативные издержки производства 1 тонны карасей в первом регионе: $AC_y = 1$, а во втором регионе – $AC_y = 2$. Максимально два региона вместе могут произвести 25 тонн карасей или 40 тонн анчоусов. Построим КПВ, руководствуясь тем, что альтернативные издержки возрастают с ростом объёмов производства. Тогда первый (слева-направо) участок КПВ будет соответствовать второму региону, а второй участок КПВ – первому региону.



То, что караси и анчоусы потребляются комплектами из двух тонн карасей и одной тонны анчоусов, можно формализовать следующим уравнением: $y = 2x$, где x – анчоусы в тоннах, а y – караси в тоннах.

Чтобы найти оптимальное потребление карасей и анчоусов, достаточно пересечь КПВ и уравнение, задающее пропорцию потребления. Сначала построим прямую $y = 2x$ на нашем графике КПВ.

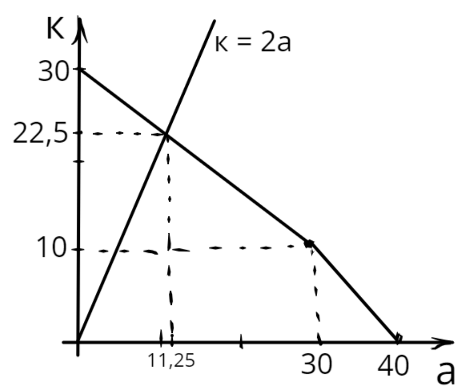


Видно, что прямая пересекает КПВ на первом участке. Уравнение первого участка КПВ: $y = 25 - 0{,}5x$. Приравниваем: $2x = 25 - 0{,}5x$ и получаем, что $x = 10$, $y = 20$. Значит в оптимуме будет производится 10 комплектов.

Ответ: 10 комплектов.

б) Аналогично пункту а) найдем альтернативные издержки производства карасей и построим КПВ, а затем снова построим на том же графике прямую $y = 2x$.

Альтернативные издержки производства карасей в первом регионе не изменились: $AC_y = 1$, а во втором регионе стали равны: $AC_y = 1{,}5$. Строим КПВ и прямую $y = 2x$ на одном графике:



Уравнение первого участка КПВ: $y = 30 - \frac{2}{3}x$. Приравниваем: $30 - \frac{2}{3}x = 2x$ и получаем, что $x = 11{,}25$, $y = 22{,}5$. Значит теперь в оптимуме потребляется 11,25 комплектов.

Ответ: 11,25 комплектов.

Задача 4. Сезонный продукт **(30 баллов)**

Зимой спрос и предложение на городском рынке пирожков с голубикой задаются, соответственно, функциями $Q_d(P) = 100 - P$ и $Q_W(P) = 3P$. Летом предложение пирожков падает до $Q_{S_1}(P) = P$, потому что голубика растёт только в холодном климате. Но локальные производители освоили новую технологию выращивания голубики летом, поэтому предложение с недавних пор падает лишь до $Q_{S_2}(P) = 2P$. Новая технология не понравилась государству, поэтому её запретили. Но столь важный рынок, решило государство, не должен оставаться без внимания. Оно решило повысить спрос на рынке до $Q_g(P) = 2a + Q_d(P)$, причём при этом тратится a^2 денежных единиц из бюджета.

а) (5 баллов) Определите изначальные равновесные цену и количество на рынке пирожков с голубикой зимой и летом до появления новой технологии.

б) (3 балла) Какие цена и количество складывались бы на рынке летом, если бы государство не запрещало новую технологию?

в) (15 баллов) Определите оптимальное значение a, если государство хочет максимизировать общественное благосостояние, которое включает в себя благосостояние потребителей, производителей и самого государства.

г) (7 баллов) Получится ли у государства достичь того же уровня общественного благосостояния, как в случае, если бы оно не запрещало новую технологию выращивания голубики?

Решение

а) Зимой спрос задаётся функцией $Q^d = 100 - P$, а предложение: $Q^s = 3P$. Равновесию соответствует точка пересечения кривых спроса и предложение. Аналитически нам нужно просто приравнять их уравнения: $100 - P = 3P \Longrightarrow P^*_w = 25$, $Q^*_w = 100 - 25 = 75$.

Летом спрос задаётся функцией $Q^d = 100 - P$, а предложение до появления новой технологии имеет вид $Q^s = P$. Тогда равновесие: $100 - P = P \Longrightarrow P^*_{s_1} = 50$, $Q^*_{s_1} = 50$.

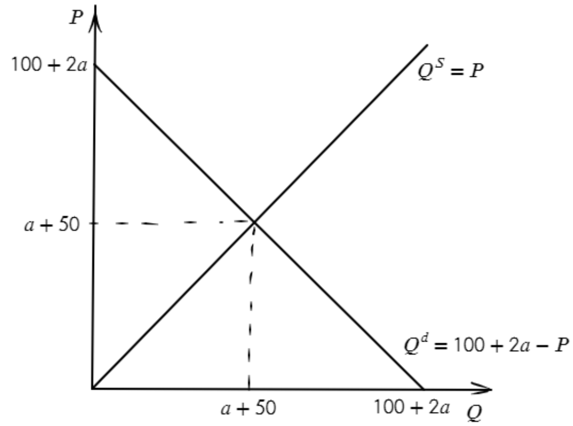
Ответ: зимой равновесная цена 25, а равновесное количество – 75; летом до появления новой технологии равновесная цена 50, а равновесное количество – 50.

б) С появлением новой технологии до вмешательства государства предложение имело вид: $Q^s = 2P$. Тогда равновесие: $100 - P = 2P \Longrightarrow P^*_{s_2} = \frac{100}{3}$, $Q^*_{s_2} = \frac{200}{3}$.

Ответ: равновесная цена $\frac{100}{3}$, равновесное количество – $\frac{200}{3}$.

в) 1. Первый вариант решения:

Условие можно было понять так, что государство своими закупками увеличивает спрос на $2a$ при каждом значении цены. Тогда спрос будет иметь вид $Q^d = 100 + 2a - P$, а предложение – $Q^s = P$. Равновесие на этом рынке: $100 + 2a - P = P \Longrightarrow P^* = 50 + a$, $Q^* = 50 + a$. Изобразим спрос и предложение на графике:



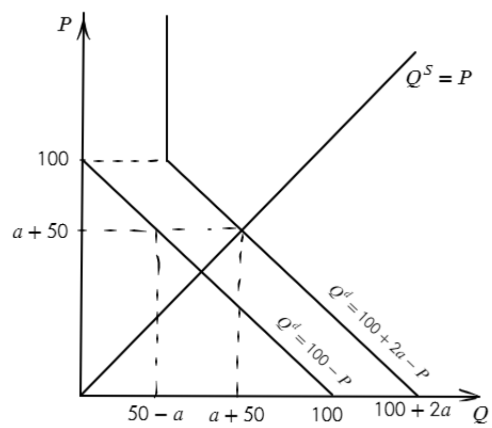
Общественное благосостояние – это сумма излишка потребителей, излишка производителей и излишка государства. Графически излишек потребителей – это площадь треугольника, ограниченного кривой спроса и прямой, соответствующей равновесной цене, а излишек производителей – площадь треугольника, ограниченного кривой предложения и прямой, соответствующей равновесной цене. Излишек государства в данном случае это просто его расходы, то есть $-a^2$. Таким образом, общественное благосостояние имеет вид: $SW = 0{,}5\cdot(a+50)(2a+100-a-50)+0{,}5\cdot(a+50)(a+50)-a^2 = a^2+100a+2500-a^2 = 100a+2500$. Видно, что общественное благосостояние возрастает по a, а значит, если государство старается максимизировать общественное благосостояние, то будет выбирать как можно большее значение a. Поскольку a никак не ограничено, оптимальный выбор государства: $a \longrightarrow +\infty$.

Ответ: $a \longrightarrow +\infty$

2. Второй вариант решения:

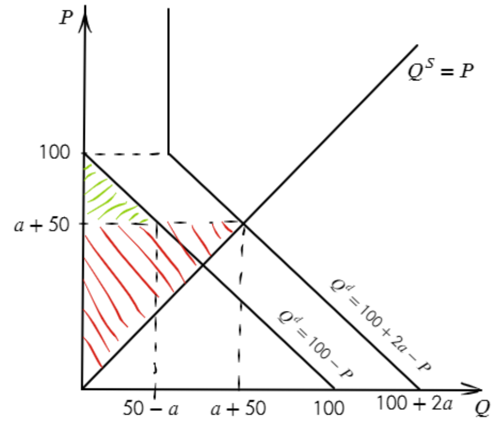
   На самом деле государство не может увеличить спрос на константу при любом значении цены. Если цена поднимется выше максимальной цены, которую готовы платить потребители (в нашем случае это 100), то спрос будет предъявлять только государство на уровне $2a$, т.е. при $P > 100$ мы будет иметь вертикальный участок спроса $Q = 2a$. При этом равновесие у нас будут при: $100 + 2a - P = P \Longrightarrow P^* = a + 50$, $Q^* = a + 50$.

   В этом случае общественное благосостояние – это всё ещё сумма излишка потребителей, излишка производителей и излишка государства, однако графически они будут считаться немного иначе. Изобразим спрос и предложение на графике:



   Излишек производителей графически – это площадь треугольника, ограниченного кривой предложения и прямой, соответствующей равновесной цене, а излишек потребителей

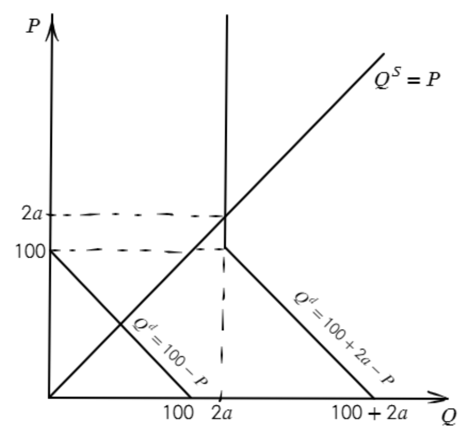
– это площадь треугольника, ограниченного кривой спроса (только участком, соответствующим самим потребителям, а не государству и потребителям) и прямой, соответствующей равновесной цене. Для удобства заштрихуем эти фигуры на графике:



Зелёным цветом заштрихован треугольник, соответствующий излишку потребителей, красным цветом – треугольник, соответствующий излишку производителей. Излишек государства составляет $-a^2$.

Таким образом, общественное благосостояние имеет вид: $SW = 0{,}5 \cdot (50 - a)(100 - a - 50) + 0{,}5 \cdot (a + 50)(a + 50) - a^2 = 2500$. В этом случае общественное благосостояние постоянно и равно 2500.

Однако, если государство закупит достаточно много пирожков с голубикой, цена вырастет настолько, что потребители больше не будут покупать этот товар. Графически эта ситуация выглядит так:



Произойдёт это в том случае, если закупки государства, то есть $2a$ превысят 100, т.е. при $a > 50$. В этом случае равновесие складывается при $P^* = 2a$, $Q^* = 2a$. Излишек потребителей в этом случае равен 0, поскольку они не покупают пирожки с голубкой совсем, а излишек производителей будет равен $0{,}5 \cdot 2a \cdot 2a = 2a^2$. Тогда общественное благосостояние имеет вид: $SW = 2a^2 - a^2 = a^2$. Видно, что при любом положительном a общественное благосостояние бесконечно возрастает с ростом a. Поскольку государство стремится сделать общественное благосостояние как можно выше, оно выберет бесконечно большое a и, соответственно, бесконечно большое общественное благосостояние.

Ответ: $a \longrightarrow +\infty$

г) Если бы государство не запрещало новую технологию, то общественное благосостояние составило бы: $SW = 0{,}5 \cdot \frac{200}{3}(100 - \frac{100}{3}) + 0{,}5 \cdot \frac{200}{3} \cdot \frac{100}{3} = \frac{10000}{3}$. В случае запрета технологии, но наличия государственных закупок, общественное благосостояние стремится к бесконечности. Таким образом, государству удалось значительно увеличить общественное благосостояние.

Ответ: да, получится.