# ПрОШ - 2022

**Решения задач**
**Второй тур. Задачи. 11 класс**
*22-23 января 2022 г.*

## Задача 1. Организаторы организуют (30 баллов)

Кирилл и Гоша занимаются экспериментами и выдают мерч в каморке. За 2 часа Кирилл может сделать 20 экспериментов или выдать 40 единиц мерча (а также любую их линейную комбинацию). Гоша, соотвественно, 80 экспериментов или 20 единиц мерча. Оба этих занятия эффективно распределены между ребятами. Мерч и эксперименты делаются специально для Миши, функция полезности которого задаётся уравнением: $U = min\{x, y\}$, где $x$ – количество единиц мерча, а $y$ – количество экспериментов.

**а) (12 баллов)** Найдите, сколько единиц мерча и экспериментов будет потреблять Миша и проиллюстрируйте ваше решение на графике (начертите карту кривых безразличия и покажите выбор оптимальной точки).

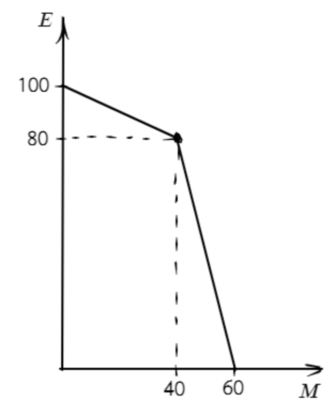
**б) (8 баллов)** Пусть про удивительные товары (эксперименты и мерч) узнал Антон и стал потреблять эти товары вместо Миши. Его функция полезности задаётся уравнением: $U = -x^2 + 8{,}5x + y$. Сколько мерча и экспериментов потребит Антон?

**в) (10 баллов)** Выведите функцию спроса Антона на мерч (в зависимости от цены на мерч), если цена эксперимента равна 1 тыс. руб.

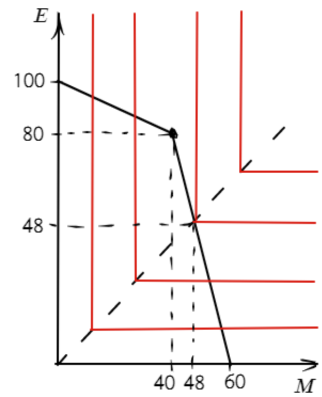
### Решение

Начнём с того, что в условии указана производительность Кирилла и Гоши за 2 часа работы. Этот факт необязательно использовать при решении, однако, если участники делили объёмы производства на 2 и решали всю задачу с этиими числами, баллы не снижались. Здесь же приведём решение для объёмов производства за 2 часа.

**а)** Альтернативная стоимость производства экспериментов для Кирилла: $AC_e^K = 2$, альтернативная стоимость производства экспериментов для Гоши: $AC_e^G = 0{,}25$. Суммарно Кирилл и Гоша могут произвести 100 экспериментов или 60 единиц мерча. Построим кривую производственных возможностей Гоши и Кирилла, руководствуясь тем, что альтернативная стоимость производства растёт с ростом объёмов производства.




Функция полезности Миши $U = minx, y$. Такая функция полезности соответствует комплементарным товарам, кривые безразличия имеют вид «уголков», вершины которых располагаются на прямой $y = x$. Оптимальной точкой будет являться точка, в которой пересекаются КПВ Гоши и Кирилла и кривая безразличия Миши. Искомой кривой безразличия в данном случае будет являться та, которая имеет ровно одну точку пересечения с КПВ. Изобразим карту кривых безразличия, КПВ и оптимальную точку на одном графике:




Видно, что оптимальная точка находится на втором (слева-направо) участке КПВ. Уравнение этого участка: $y = 240 - 4x$. Приравняем уравнение второго участка КПВ и прямой $y = x$: $240 - 4x = x \Longrightarrow x^* = 48$, $y^* = 48$. Таким образом, в оптимуме будет потребляться по 48 единиц мерча и экспериментов.

**Ответ: 48 единиц мерча и 48 экспериментов.**

**б)** Здесь стоит рассмотреть два случая.

1. Первый случай: оптимум находится на первом (слева-направо) участке КПВ.

   Уравнение первого участка КПВ: $y = 100 - 0{,}5x$, $x \in [0, 40]$. Подставим это в полезность Антона и промаксимизируем её.

$$U_1 = -x^2 + 8{,}5x + 100 - 0{,}5x = -x^2 + 8x + 100 \longrightarrow \max_{x\in[0,40]}$$

   Функция полезности имеет вид параболы ветвями вниз, поэтому максимум – в вершине.

$$x^* = \frac{8}{2} = 4 \in [0, 40],\ y^* = 98$$

$$U_1^* = -16 + 32 + 100 = 116$$

2. Второй случай: оптимум находится на втором (слева-направо) участке КПВ.

   Уравнение второго участка КПВ: $y = 240 - 4x$, $x \in [40, 60]$. Подставим это в полезность Антона и промаксимизируем её.

$$U_2 = -x^2 + 8{,}5x + 240 - 4x = -x^2 + 4{,}5x + 240 \longrightarrow \max_{x\in[40,60]}$$

   Функция полезности имеет вид параболы ветвями вниз, поэтому максимум – в вершине.

$$x_{\text{в}} = \frac{4{,}5}{2} = 2{,}25 \notin [40, 60]$$

   Видно, что вершина параболы не принадлежит промежутку, значит выбираем граничную точку промежутку, ближайшую к координате вершине, это – $x = 40$, тогда найдём полезность:

$$U_2^* = -1600 + 180 + 240 = -1180$$

Во втором случае полезность, очевидно, меньше, чем в первом, значит оптимальные объёмы потребления мерча и экспериментов найдены в первом случае.

**Ответ: 4 единицы мерча и 98 единиц экспериментов.**

**в)** Запишем бюджетное ограничение Антона в общем виде: $P_x \cdot x + P_y \cdot y \leqslant I$, где $P_x$, $P_y$ – цены мерча и экспериментов соответственное, а $I$ – доход Антона. С учётом данных из условия можем переписать бюджетное ограничение Антона в следующем виде: $P_x \cdot x + y \leqslant I$ или $y \leqslant I - P_x \cdot x$. Заметим, что если $y < I - P_x \cdot x$, мы может немного увеличить $y$ и уменьшить $x$, при этом увеличив полезность, поэтому неравенство можно заменить на равенство. Тогда подставим бюджетное ограничение в полезность Антона и промаксимизируем:

$$U = -x^2 + 8{,}5x + I - P_x \cdot x = -x^2 + (8{,}5 - P_x)x + I \longrightarrow \max_{0 \leqslant x \leqslant \frac{I}{P_x}}$$

Функция полезности имеет вид параболы ветвями вниз, поэтому максимум – в вершине.

$$x^* = \frac{8{,}5 - P_x}{2}$$

Заметим, что если $P_x > 8{,}5$, то товар $x$ становится слишком дорогим, и Антон перестаёт его покупать, т.е. $x^* = 0$, $P_x > 8{,}5$. С другой стороны, если расходы на товар $x$ в оптимуме превышают доход Антона, то он будет потреблять ровно $x^* = \frac{I}{P_x}$, $\frac{8{,}5 - P_x}{2} > \frac{I}{P_x}$.

Таким образом, спрос на мерч состоит из трёх участков:

$$x^d = \begin{cases} 0, & P_x > 8{,}5 \\ \frac{8{,}5 - P_x}{2}, & P_x \leqslant 8{,}5,\ \frac{8{,}5 - P_x}{2} \leqslant \frac{I}{P_x} \\ \frac{I}{P_x}, & \frac{8{,}5 - P_x}{2} > \frac{I}{P_x} \end{cases}$$

## Задача 2. Eco-friendly (9, 10, 11 классы) (30 баллов)

В городе Врн компанией «Pirelli» организовано производство автомобильных покрышек. Спрос на покрышки имеет вид $Q_d = 100 - P + 20\beta$, где $P$ – цена покрышек, а коэффициент $\beta$ определяет степень экологичности производства. $\beta = 1$, если производство экологичное, и $\beta = 0$ в ином случае (то есть может принимать только эти два значения). Функция издержек фирмы также зависит от $\beta$ и имеет вид: $TC = (1 + \beta)Q^2 + 100 + 50\beta$.

**а) (10 баллов)** «Pirelli» является монополистом на рынке покрышек в городе Врн. Определите, какое $\beta$ выберет фирма, какой объем продукции произведет и какую прибыль получит.

**б) (2 балла)** Какой размер аккордной субсидии должно выплатить фирме государство, чтобы производство стало экологичным? Считайте, что если фирме безразлично, делать заводы экологичными или нет, она будет делать первое. Государство выплачивает субсидию только тем фирмам, которые заботятся об экологии!

**в) (18 баллов)** Теперь правительство региона взяло «Pirelli» под свой контроль и само выбирает коэффициент $\beta$. Оно руководствуется интересами общества и максимизирует совокупную функцию полезности $U = \sqrt{\beta} + \pi$, где $\pi$ – прибыль фирмы. Взаимодействие между государством и компанией устроено так: сначала государство выбирает значение $\beta$, а затем фирма выбирает объем производства. Какое значение $\beta$ установит государство?

**Решение**

**а)** Запишем обратную функцию спроса: $P^d = 100+20\beta-Q$. Теперь можем записать функцию прибыли монополиста:

$$\Pi = (100+20\beta)Q - Q^2 - (1+\beta)Q^2 - 100 - 50\beta = -(2+\beta)Q^2 + (100+20\beta)Q - 100 - 50\beta \longrightarrow \max_{Q\geqslant 0}$$

Функция прибыли имеет вид параболы ветвями вниз относительно $Q$, поэтому максимум – в вершине.

$$Q^* = \frac{100+20\beta}{2(2+\beta)}$$

Подставим найденное оптимальное количество обратно в прибыль:

$$\Pi = -\frac{(2+\beta)(100+20\beta)^2}{4(2+\beta)^2} + \frac{(100+20\beta)^2}{2(2+\beta)} - 100 - 50\beta = \frac{(100+20\beta)^2}{4(2+\beta)} - 100 - 50\beta$$

Сравним прибыли при $\beta = 0$ и $\beta = 1$:

$$\Pi(\beta = 0) = \frac{100\cdot 100}{4\cdot 2} - 100 = 1250 - 100 = 1150$$

$$\Pi(\beta = 1) = \frac{120\cdot 120}{4\cdot 3} - 100 - 50 = 1200 - 150 = 1050$$

Очевидно, $\Pi(\beta = 0) > \Pi(\beta = 1) \Longrightarrow \beta^* = 0$, $\Pi^* = 1150$, $Q^* = \frac{100}{4} = 25$.

**Ответ:** $\beta^* = 0$, $Q^* = 25$, $\Pi^* = 1150$.

**б)** Аккордная субсидия просто прибавляется к прибыли, как константа. Для того, чтобы фирме было выгодно выбрать экологичное производство, должно выполняться неравенство: $\Pi(\beta = 0) \leqslant \Pi(\beta = 1) + S$, где $S$ – размер субсидии. Подставив числа из предыдущего пункта, получим:

$$1150 \leqslant 1050 + S \Longrightarrow S \geqslant 100$$

**Ответ: при субсидии больше или равной 100.**

**в)** Оптимальный выбор объёма производства в зависимости от $\beta$ не изменится, поэтому прибыль в зависимости от $\beta$ имеет вид: $\Pi = \frac{(100+20\beta)^2}{4(2+\beta)} - 100 - 50\beta$. Тогда совокупная функция полезности имеет вид:

$$U = \sqrt{\beta} + \frac{(100+20\beta)^2}{4(2+\beta)} - 100 - 50\beta$$

Сравним полезности при $\beta = 0$ и $\beta = 1$:

$$U(\beta = 0) = \frac{100\cdot 100}{4\cdot 2} - 100 = 1150$$

$$U(\beta = 1) = 1 + \frac{120\cdot 120}{4\cdot 3} - 100 - 50 = 1051$$

Видно, что $U(\beta = 0) > U(\beta = 1)$, поэтому государство выберет $\beta^* = 0$,

**Ответ: 0.**

## **Задача 3.** Я больше не буду играть в эту игру **(30 баллов)**

Девочка Элли располагает доходом $I = 20$ и тратит его исключительно на потребление уникального товара под названием «Маги в Шогилу». Полезность Элли задается функцией $U = -q^2 + 42q - 2pq$, где $q$ – количество потребленных Магов в Шогилу, $p$ – цена, по которой Элли их купила. Считайте, что Элли воспринимает цену $p$ как заданную.

Маги в Шогилу продает фирма-монополист «Голлы Ралександра», его функция издержек задается как $TC = 6q$. Фирма максимизирует свою прибыль. При этом монополист может выбрать заплатить $\alpha^2$ денежных единиц загадочной подруге Элли – Йонмель, которая в таком случае будет готова приобрести $\alpha$ единиц Магов в Шогилу по той же цене, что и Элли. Если Элли приобретет 0 единиц товара, Йонмель не купит ничего и обиженно уйдет вместе с подругой.

**а) (10 баллов)** Выведите рыночный спрос в зависимости от $\alpha$.

**б) (15 баллов)** Определите значение $\alpha$, которое выберет монополист, и найдите прибыль, которую он получит.

**в) (5 баллов)** Предположим теперь, что деятельностью «Голлы Ралександра» недоволен верховный орган правительства – Суд Фортуны. Через особые каналы воздействия Суд Фортуны добился того, что издержки монополиста возросли до $TC = 10q$, а плата, которую необходимо отдавать Йонмель возрасла до $5\alpha^2 + 6$. Определите новое равновесное значение $\alpha$ и прибыль монополиста.

### Решение

**а)** Бюджетное ограничение Элли: $pq \leqslant 20$ или $q \leqslant \frac{20}{p}$.

Промаксимизируем полезность:

$$U = -q^2 + (42 - 2p)q \longrightarrow \max_{q \geqslant 0}$$

$$q^* = \frac{42 - 2p}{2} = 21 - p$$

Очевидно, что количество товара не может быть отрицательным, поэтому $p \leqslant 21$.

Проверим, при каких значениях цены выполняется бюджетное ограничение:

$$21 - p \leqslant \frac{20}{p} \Longrightarrow p^2 - 21p + 20 \geqslant 0 \Longrightarrow (p - 20)(p - 1) \geqslant 0$$

$$\left[\begin{array}{l} 0 \leqslant p \leqslant 1 \\ 20 \leqslant p \leqslant 21 \end{array}\right.$$

Если бюджетное ограничение не выполняется, значит Элли тратит больше денег, чем имеет, поэтому в этом случае оптимальное потребление Магов в Шогилу будет равно $\frac{20}{p}$, т.е. она просто потратит весь свой доход.

Так, можем записать спрос Элли на Маги в Шогилу:

$$q^d = \begin{cases} 21 - P, & 0 \leqslant P \leqslant 1 \\ \frac{20}{P}, & 1 < P < 20 \\ 21 - P, & 20 \leqslant P \leqslant 21 \\ 0, & P > 21 \end{cases}$$

Теперь добавим к спросу Элли спрос её подруги Йонмель и получим рыночный спрос на Маги в Шогилу в зависимости от $\alpha$:

$$Q^d = \begin{cases} 21 + \alpha - P, & 0 \leqslant P \leqslant 1 \\ \frac{20}{P} + \alpha, & 1 < P < 20 \\ 21 + \alpha - P, & 20 \leqslant P < 21 \\ 0, & P \geqslant 21 \end{cases}$$

**б)** Рассмотрим 4 случая, в каждом из которых будем максимизировать прибыль монополиста.

1. $Q^d = 21 - P$, $P \in [0, 1] \cup [20, 21]$

$$\Pi_1 = 21P - P^2 - 126 + 6P = -P^2 + 27P - 126$$

Функция прибыли имеет вид параболы ветвями вниз, поэтому максимум – в вершине.

$$P^* = \frac{27}{2} = 13{,}5 \notin [0, 1] \cup [20, 21]$$

Видно, что найденная цена не принадлежит нужному промежутку, поэтому выбираем ближайшее значение из промежутка (поскольку имеем дело с параболой ветвями вниз, чем дальше мы от вершины, тем меньше значение функции). Значит $P^* = 20 \Longrightarrow \Pi_1 = -400 + 540 - 126 = 14$.

2. $Q^d = \frac{20}{P}$, $P \in [1, 20]$

$$\Pi_2 = 20 - \frac{120}{P}$$

$$\Pi_2' = \frac{120}{P^2} > 0 \forall P$$

Получили, что производная всегда положительна, значит функция всегда возрастает, поэтому выбираем наибольшее возможное значение цены: $P^* = 20 \Longrightarrow \Pi_2 = 20 - 6 = 14$.

3. $Q^d = 21 + \alpha - P$, $P \in [0, 1] \cup [20, 21]$

$$\Pi_3 = 21P + \alpha P - P^2 - 126 - 6\alpha + 6P - \alpha^2 = -P^2 + (27 + \alpha)P - 126 - 6\alpha - \alpha^2$$

функция прибыли имеет вид параболы ветвями вниз по $P$, поэтому максимум – в вершине.

$$P^* = \frac{27 + \alpha}{2} \Longrightarrow \alpha \in [13, 15]$$

Подставим найденное значение цены в прибыль и промаксимизируем по $\alpha$:

$$\Pi_3 = \frac{(27 + \alpha)^2}{4} - 126 - 6\alpha - \alpha^2 = -0{,}75\alpha^2 + 7{,}5\alpha + 56{,}25$$

Функция прибыли имеет вид параболы с ветвями вниз, поэтому максимум – в вершине.

$$\alpha^* = 5 \notin [13, 15]$$

Найденное оптимальное значение не принадлежит промежутку, поэтому будем брать ближайшее допустимое, т.е. $\alpha^* = 13 \Longrightarrow \Pi_3 = -0{,}75 \cdot 169 + 7{,}5 \cdot 13 + 56{,}25 = 27$.

4. $Q^d = \frac{20}{P} + \alpha$, $P \in [1, 20]$

$$\Pi_4 = 20 + \alpha P - \frac{120}{P} - 6\alpha - \alpha^2 = -\alpha^2 + (P-6)\alpha + 20 - \frac{120}{P}$$

Функция прибыли имеет вид параболы ветвями вниз относительно $\alpha$, поэтому максимум – в вершине.

$$\alpha^* = \frac{P-6}{2}$$

Подставим полученное значение обратно в прибыль:

$$\Pi_4 = \frac{(P-6)^2}{4} + 20 - \frac{120}{P}$$

$$\Pi_4' = \frac{P-6}{2} + \frac{120}{P^2} > 0 \text{ при допустимых } a$$

Получили, что производная всегда положительна на ограничении, значит будем выбирать наибольшее возможное $P^* = 20 \Longrightarrow \Pi_4 = 49 + 20 - 6 = 63$.

Таким образом, наибольшее значение прибыли получили в четвёртом случае. В этом случае монополист выбирает $P^* = 20$, а значит $\alpha = \frac{20-6}{2} = 6$, а прибыль равна 63.

**Ответ:** $\alpha = 6$, $\Pi = 63$**.**

**в)** Точно так же, как и в предыдущем пункте рассмотрим 4 случая.

1. $Q^d = 21 - P$, $P \in [0, 1] \cup [20, 21]$

$$\Pi_1 = 21P - P^2 - 210 + 10P = -P^2 + 31P - 210$$

Функция прибыли имеет вид параболы ветвями вниз, значит максимум – в вершине.

$$P^* = \frac{31}{2} = 15{,}5 \notin [0, 1] \cup [20, 21]$$

Найденное оптимальное значение не принадлежит допустимому промежутку, поэтому выбираем ближайшее: $P^* = 20 \Longrightarrow \Pi_1 = -400 + 620 - 210 = 10$.

2. $Q^d = \frac{20}{P}$, $P \in [1, 20]$

$$\Pi_2 = 20 - \frac{200}{P}$$

$$\Pi_2' = \frac{200}{P^2} > 0$$

Получили, что производная всегда положительна, значит функция всегда возрастает, поэтому выбираем наибольшее возможное $P^* = 20 \Longrightarrow \Pi_2 = 20 - 10 = 10$.

3. $Q^d = 21 + \alpha - P$, $P \in [0, 1] \cup [20, 21]$

$$\Pi_3 = (21-P)P + \alpha P - 10(21-P) - 10\alpha - 5\alpha^2 - 6 = -5\alpha^2 + (P-10)\alpha + (21-P)(P-10) - 6$$

Функция прибыли имеет вид параболы ветвями вниз, поэтому максимум – в вершине.

$$P^* = \frac{P-10}{10}$$

Подставим найденное значение цены обратно в прибыль:

$$\Pi_3 = \frac{(P-10)^2}{20} - (P-21)(P-10) - 6$$

$$\Pi_3' = \frac{P-10}{10} - P + 10 - P + 21 - 6 = 0$$

$$P^* = \frac{240}{19} \notin [0,1] \cup [20,21]$$

Найденное оптимальное значение не принадлежит оптимальному промежутку, выбираем ближайшее: $P^* = 20 \Longrightarrow \Pi_3 = 5 + 10 - 6 = 9$.

4. $Q^d = \frac{20}{P} + \alpha$, $P \in [1,20]$

$$\Pi_4 = 20 + \alpha P - \frac{200}{P} - 10\alpha - 5\alpha^2 - 6 = -5\alpha^2 + (P-10)\alpha + 14 - \frac{200}{P}$$

Функция прибыли имеет вид параболы ветвями вниз относительно $\alpha$, значит максимум – в вершине.

$$\alpha^* = \frac{P-10}{10}$$

Подставим найденное значение обратно в прибыль:

$$\Pi_4 = \frac{(P-10)^2}{20} - \frac{200}{P} + 14$$

$$\Pi_4' = \frac{P-10}{10} + \frac{200}{P^2} > 0$$

Получили, что производная положительна для всех допустимых $P$, значит функция все время возрастает, поэтому выбираем наибольшее возможное $P^* = 20 \Longrightarrow \Pi_4 = 5 - 10 + 14 = 9$.

Получили, что наибольшая прибыль монополиста при новых условиях равна 10 и достигается в условиях отсутствия торговли с Йонмель, т.е. при $\alpha = 0$.

**Ответ:** $\alpha = 0$, $\Pi = 10$.

## Задача 4. Предельно склоните потребление (11 класс) (30 баллов)

Потребитель живет три периода, а именно: 0,1,2. Его полезность от потребления в каждом из периодов выражается функцией $U_i = 3T \cdot C_i - C_i^2$, где $C_i$ – потребление в периоде $i \in \{0,1,2\}$. В нулевом периоде ему приходит чек от Дональда Трампа в размере $T$, а, так как из-за пандемии он потерял работу, то это его единственный источник дохода за эти три периода. Иными словами бюджетное ограничение в первом периоде имеет вид: $W_1 = (1+r)(T - C_0)$, а во втором: $W_2 = (1+r)(W_1 - C_1)$, где $r$ – ставка процента, $W_1$ – богатство в первом периоде, а $W_2$ – богатство во втором периоде.

Потребитель очень терпелив, и поэтому ценит текущий период так же, как и будущий. Для простоты считайте, что $r = 0$.

**а) (10 баллов)** Найдите $mpc$ (предельную склонность к потреблению) потребителя в периоде 0.

**б) (10 баллов)** Пусть теперь потребление в первом периоде экзогенно задано как $C_1 = \frac{1}{2}(1-\lambda)W_1$, где $\lambda$ – ошибка в выборе потребления в первом периоде. Найдите новое значение $mpc$ в периоде 0, как функцию от $\lambda$.

**в) (10 баллов)** Докажите, что $mpc$ увеличивается при любом отклонении $\lambda$ от нуля.

**Решение**

**а)** Запишем задачу потребителя:

$$\begin{cases} U = 3T \cdot C_0 - C_0^2 + 3T \cdot C_1 - C_1^2 + 3T \cdot C_2 - C_2^2 \longrightarrow \max\limits_{C_0, C_1, C_2 \geqslant 0} \\ C_0 + C_1 + C_2 = T \end{cases}$$

Найдём предельную полезность потребления в каждом из периодов:

$$\begin{cases} MU_0 = U'_{C_0} = 3T - 2C_0 \\ MU_1 = U'_{C_1} = 3T - 2C_1 \\ MU_2 = U'_{C_2} = 3T - 2C_2 \end{cases}$$

Из бюджетного ограничения видно, что цена потребления в каждом периоде постоянная и равна единице, поэтому можем записать правило равенства отношений предельных полезностей к ценам следующим образом: $MU_0 = MU_1 = MU_2 \Longrightarrow C_0 = C_1 = C_2 = \frac{T}{3}$.

Тогда несложно найти предельную норму потребления в нулевом периоде. Она равна отношению потребления к доходу, т.е. $mpc_0 = \frac{\frac{T}{3}}{T} = \frac{1}{3}$.

**Ответ:** $\frac{1}{3}$.

**б)**

$$C_1 = \frac{1}{2}(1-\lambda)W_1 = \frac{1-\lambda}{2}(T - C_0)$$

Из бюджетного ограничения:

$$C_2 = T - C_0 - C_1 = T - C_0 - \frac{1-\lambda}{2}(T - C_0) = (T - C_0)\frac{1+\lambda}{2}$$

Подсталвляем всё в полезность:

$$U = 3T \cdot C_0 - C_0^2 + 3T \cdot \frac{1-\lambda}{2}(T - C_0) - \frac{(1-\lambda)^2}{4}(T - C_0)^2 + 3T \cdot \frac{1+\lambda}{2}(T - C_0) - \frac{(1+\lambda)^2}{4}(T - C_0)^2 =$$

$$= 3T \cdot C_0 - C_0^2 + 3T(T - C_0)\frac{1-\lambda+1+\lambda}{2} - (T - C_0)^2\frac{(1-\lambda)^2 + (1+\lambda)^2}{4} = 3T \cdot C_0 - C_0^2 + 3T(T - C_0) -$$

$$-(T - C_0)^2\frac{1+\lambda^2}{2} = -(1 + \frac{1+\lambda^2}{2})C_0^2 + (1+\lambda^2)T \cdot C_0 + 3T^2 - \frac{1+\lambda^2}{2}T^2$$

Функция полезности имеет вид параболы ветвями вниз относительно $C_0$, значит максимум – в вершине.

$$C_0^* = \frac{(1+\lambda^2)T}{3+\lambda^2}$$

Теперь можем найти предельную склонность к потреблению:

$$mpc_0 = \frac{\frac{(1+\lambda^2)T}{3+\lambda^2}}{T} = \frac{1+\lambda^2}{3+\lambda^2}$$

**Ответ:** $\frac{1+\lambda^2}{3+\lambda^2}$

**в)** Найдём производную $mpc$ по $\lambda$:

$$mpc'_\lambda = \frac{2\lambda(3+\lambda^2) - 2\lambda(1+\lambda^2)}{(3+\lambda^2)^2} = \frac{4\lambda}{(3+\lambda^2)^2}$$

Производная равна 0 при $\lambda = 0$. Теперь определим минимум это или максимум:

$$mpc'' = \frac{4(3+\lambda^2)^2 - 2 \cdot 2\lambda(3+\lambda^2) \cdot 4\lambda}{(3+\lambda^2)^4}$$

$$mpc''(0) = \frac{4 \cdot 9}{81} = \frac{4}{9} > 0$$

Вторая производная больше 0, значит $\lambda = 0$ – точка минимума для функции $mpc$, что по определению означает, что при любом отклонении от данной точки функция будет увеличиваться.