

Второй тур. Задачи

Конкурс	10 класс
Дата написания	22-23 января 2022 г.
Количество заданий	4
Сумма баллов	120
Время написания	140 минут

Не пытайтесь читать задания до объявления начала написания тура.

Излагайте свои мысли четко, пишите разборчиво. Зачеркнутые фрагменты не будут проверены. Если вы хотите, чтобы зачеркнутая часть была проверена, явно напишите об этом в работе.

Всякий раз четко обозначайте, где начинается решение каждого пункта задачи. Перед началом решения пункта **а)** можно выписать общую часть, подходящую для всех пунктов, и дальше ссылаться на нее. Не пропускайте ходы в решении: жюри может ставить баллы за любые корректно выполненные действия, даже если вам они кажутся малозначительными.

Все утверждения в вашем решении должны быть либо общеизвестными (стандартными), либо логически следовать из условия задачи или из предыдущих рассуждений. Все не общеизвестные факты, не следующие тривиально из условия, должны быть доказаны. Если в решении есть противоречащие друг другу суждения, то они не будут оценены, даже если одно из них верное. Прежде чем задать вопрос по условию, перечитайте его ещё раз.

Если не сказано иного, считайте все товары, ресурсы и активы бесконечно делимыми. Кроме того, во всех задачах выполняются законы спроса и предложения, а также предельный продукт всех факторов производства положительный.

Удачи!

Настойчивость – очень важный элемент успеха. Если вы достаточно долго стучитесь в двери, вы обязательно кого-нибудь разбудите.

— Г. Лонгфелло

Задача 1. Сезонный продукт**(30 баллов)**

Зимой спрос и предложение на городском рынке пирожков с голубикой задаются, соответственно, функциями $Q_d(P) = 100 - P$ и $Q_w(P) = 3P$. Летом предложение пирожков падает до $Q_{s_1}(P) = P$, потому что голубика растёт только в холодном климате. Но локальные производители освоили новую технологию выращивания голубики летом, поэтому предложение с недавних пор падает лишь до $Q_{s_2}(P) = 2P$. Новая технология не понравилась государству, поэтому её запретили. Но столь важный рынок, решило государство, не должен оставаться без внимания. Оно решило повысить спрос на рынке до $Q_g(P) = 2a + Q_d(P)$, причём при этом тратится a^2 денежных единиц из бюджета.

а) (5 баллов) Определите изначальные равновесные цену и количество на рынке пирожков с голубикой зимой и летом до появления новой технологии.

б) (3 балла) Какие цена и количество складывались бы на рынке летом, если бы государство не запрещало новую технологию?

в) (15 баллов) Определите оптимальное значение a , если государство хочет максимизировать общественное благосостояние, которое включает в себя благосостояние потребителей, производителей и самого государства.

г) (7 баллов) Получится ли у государства достичь того же уровня общественного благосостояния, как в случае, если бы оно не запрещало новую технологию выращивания голубики?

Задача 2. Организаторы организуют**(30 баллов)**

Кирилл и Гоша занимаются экспериментами и выдают мерч в каморке. За 2 часа Кирилл может сделать 20 экспериментов или выдать 40 единиц мерча (а также любую их линейную комбинацию). Гоша, соответственно, 80 экспериментов или 20 единиц мерча. Оба этих занятия эффективно распределены между ребятами. Мерч и эксперименты делаются специально для Миши, функция полезности которого задаётся уравнением: $U = \min\{x, y\}$, где x – количество единиц мерча, а y – количество экспериментов.

а) (12 баллов) Найдите, сколько единиц мерча и экспериментов будет потреблять Миша и проиллюстрируйте ваше решение на графике (начертите карту кривых безразличия и покажите выбор оптимальной точки).

б) (8 баллов) Пусть про удивительные товары (эксперименты и мерч) узнал Антон и стал потреблять эти товары вместо Миши. Его функция полезности задаётся уравнением: $U = -x^2 + 8,5x + y$. Сколько мерча и экспериментов потребит Антон?

в) (10 баллов) Выведите функцию спроса Антона на мерч (в зависимости от цены на мерч), если цена эксперимента равна 1 тыс. руб.

Задача 3. Eco-friendly**(30 баллов)**

В городе Врн компанией «Pirelli» организовано производство автомобильных покрышек. Спрос на покрышки имеет вид $Q_d = 100 - P + 20\beta$, где P – цена покрышек, а коэффициент β определяет степень экологичности производства. $\beta = 1$, если производство экологичное, и $\beta = 0$ в ином случае (то есть может принимать только эти два значения). Функция издержек фирмы также зависит от β и имеет вид: $TC = (1 + \beta)Q^2 + 100 + 50\beta$.

а) (10 баллов) «Pirelli» является монополистом на рынке покрышек в городе Врн. Определите, какое β выберет фирма, какой объем продукции произведет и какую прибыль получит.

б) (2 балла) Какой размер аккордной субсидии должно выплатить фирме государство, чтобы производство стало экологичным? Считайте, что если фирме безразлично, делать заводы экологичными или нет, она будет делать первое. Государство выплачивает субсидию только тем фирмам, которые заботятся об экологии!

в) (18 баллов) Теперь правительство региона взяло «Pirelli» под свой контроль и само выбирает коэффициент β . Оно руководствуется интересами общества и максимизирует совокупную функцию полезности $U = \sqrt{\beta} + \pi$, где π – прибыль фирмы. Взаимодействие между государством и компанией устроено так: сначала государство выбирает значение β , а затем фирма выбирает объем производства. Какое значение β установит государство?

Задача 4. Я больше не буду играть в эту игру**(30 баллов)**

Девочка Элли располагает доходом $I = 20$ и тратит его исключительно на потребление уникального товара под названием «Маги в Шогилу». Полезность Элли задается функцией $U = -q^2 + 42q - 2pq$, где q – количество потребленных Магов в Шогилу, p – цена, по которой Элли их купила. Считайте, что Элли воспринимает цену p как заданную.

Маги в Шогилу продает фирма-монополист «Голлы Ралександра», его функция издержек задается как $TC = 6q$. Фирма максимизирует свою прибыль. При этом монополист может выбрать заплатить α^2 денежных единиц загадочной подружке Элли – Йонмель, которая в таком случае будет готова приобрести α единиц Магов в Шогилу по той же цене, что и Элли. Если Элли приобретет 0 единиц товара, Йонмель не купит ничего и обиженно уйдет вместе с подружкой.

а) (10 баллов) Выведите рыночный спрос в зависимости от α .

б) (15 баллов) Определите значение α , которое выберет монополист, и найдите прибыль, которую он получит.

в) (5 баллов) Предположим теперь, что деятельностью «Голлы Ралександра» недоволен верховный орган правительства – Суд Фортуны. Через особые каналы воздействия Суд Фортуны добился того, что издержки монополиста возросли до $TC = 10q$, а плата, которую необходимо отдавать Йонмель возрасла до $5\alpha^2 + 6$. Определите новое равновесное значение α и прибыль монополиста.