



11 класс

7 марта 2022 года

Время написания – 235 минут

Количество задач – 4

Сумма баллов – 135

Заключительный этап

Московской олимпиады школьников – 2022

ПО ЭКОНОМИКЕ

Все задачи требуют записи подробного решения. Все действия в решении должны быть обоснованы. Все утверждения, содержащиеся в решении, должны быть либо общеизвестными (стандартными), либо логически следовать из условия задачи или из предыдущих рассуждений.

Все не общеизвестные факты, не следующие явно из условия, должны быть доказаны. Не пропускайте ходы в решении: жюри может ставить баллы за любые корректно выполненные действия, даже если вам они кажутся малозначительными. Если в решении есть противоречащие друг другу суждения, то они не будут оценены, даже если одно из них верное. Рекомендуем все вычисления производить, не используя черновик.

Старайтесь излагать свои мысли чётко, писать разборчиво. Зачёркнутые фрагменты не будут проверены. Если вы хотите, чтобы зачёркнутая часть была проверена, явно напишите об этом в работе. Всякий раз чётко обозначайте, где начинается решение каждого пункта задачи. Перед началом решения пункта (1) можно выписать общую часть, подходящую для всех пунктов, и дальше ссылаться на неё.

Если не сказано иного, считайте все единицы товаров, ресурсов и активов во всех задачах бесконечно делимыми.

Удачи!

[Справка: производная от $\ln x$ равна $1/x$; $\ln\left(\frac{2}{3}\right) \approx -0.4$, $\ln(100) \approx 4.6$, $\ln(182.5) \approx 5.2$]

Задача 1. Подарок от бабушки

Рассмотрим два года из жизни Пети, которому сегодня исполнилось 18 лет. По такому случаю бабушка подарила ему на совершеннолетие 120 евро. Это был достаточно щедрый жест со стороны бабушки, потому что на 19 лет она ему пообещала подарить только 75 евро. Подаренные деньги Петя может либо потратить на развлечения, либо каким-то образом перераспределить их во времени. Например, он может часть денег сегодня сберечь, чтобы потратить в следующем году, либо потратить больше сегодня за счет средств будущего года. При этом предположим, что Петя принимает решение только на два года и не учитывает доходы и потребление в будущих периодах, а на момент 18ти лет не имеет никаких сбережений.

Межвременная функция полезности Пети имеет вид $U(c_1, c_2) = 120 \ln c_1 + \delta c_2$, где c_1 – расходы на развлечения в первый год, а c_2 – расходы на развлечения во второй год. Петя, как и все люди, по-разному относится к настоящему и будущему: фактор дисконтирования δ показывает, насколько развлечения сегодня важнее развлечений завтра или насколько нетерпелив Петя. Обычно фактор дисконтирования лежит в интервале от 0 до 1: чем меньше значение δ , тем нетерпеливее Петя, и поэтому он будет меньше заботиться о своем будущем; если $\delta = 1$, значит, будущее так же важно, как и настоящее. Известно, что фактор дисконтирования Пети δ лежит в интервале $(\frac{2}{3}, 1)$.

- 1) Допустим, ставка банковского процента равна 20% годовых, то есть если Петя сегодня отложит s ден. ед., то через год он получит $(1 + 0.2)s$, а если он сегодня возьмет в кредит b ден. ед., то через год он должен вернуть $(1 + 0.2)b$. Найдите уравнение межвременного бюджетного ограничения Пети и покажите его на графике (c_1, c_2) ; составьте целевую функцию Пети.
- 2) Найдите оптимальные размеры расходов на развлечения в каждом году.
- 3) Теперь допустим, что ставка по депозиту равна 20% годовых, а ставка по кредиту 25% годовых. Найдите уравнение нового бюджетного ограничения Пети. Подумайте, как распределение расходов Пети по годам зависит от размера δ . Определите, при каких значениях ставки дисконтирования Петя не будет являться ни заемщиком, ни сберегателем. [Подсказка: определите, когда Петя будет сберегать, а когда брать кредит.]
- 4) Предположим, государство ввело 20% налог на всю сумму вклада, включая проценты (то есть по истечении срока вклада государство забирает 20% от всей суммы к выплате). Выгодно ли Пете быть сберегателем в таких условиях?

Задача 2. Минералы и налоги

На территории небольшого островного государства открыли месторождение редкого минерала. Он настолько редкий, что его месячная добыча измеряется в килограммах. Месячный спрос на минерал в килограммах $Q = 100 - p$.

На острове есть только две фирмы, которые занимаются разработкой месторождений. Издержки каждой фирмы имеют вид $TC_i(q_i) = 0.5q_i^2 + 4q_i$, где q_i – количество добытого минерала в килограммах фирмой $i = \{1, 2\}$. Фирмы конкурируют, одновременно принимая решения об объёме выпуска, а цена на рынке формируется исходя из общего количества. Например, если обе фирмы выбрали выпуск по 10 единиц, то цена на рынке установится $P = 100 - 10 - 10 = 80$.

- 1) Правительство решило пополнить казну и ввело налог со ставкой t ден. ед. на каждый добытый килограмм минерала. Какую ставку налога необходимо установить, чтобы получить максимальные налоговые сборы? Чему равны сборы и какую прибыль получит каждая фирма?
- 2) Какую ставку налога на прибыль 100% нужно установить, чтобы получить такие же налоговые сборы, как в предыдущем пункте задачи? Какую прибыль получит каждая фирма в этом случае?
- 3) По просьбе делового сообщества, настаивавшего на смягчении налоговой политики и увеличении добычи минерала, правительство приняло решение изменить налоговые ставки, но так, чтобы налоговые сборы в итоге были бы не меньше 1024 денежных единиц. Какой из двух способов налогообложения оно выберет, стремясь удовлетворить пожелания делового сообщества? Какая ставка налога будет назначена и чему будет равен объём производства редкого минерала?

Задача 3. Внешние эффекты

На берегу озера стоит деревообрабатывающий завод, выпускающий мебель. Завод является монополистом на мебельном рынке города. Издержки завода непосредственно на производство мебели равны $TC = 0.25q^2 + 20q$, где q – количество произведенных комплектов мебели. У завода имеется один покупатель – ценополучатель, максимизирующий разницу между полезностью от потребления мебели и расходами на ее приобретение. Общая полезность покупателя от потребления q единиц мебели равна $TU = 240q - 0.375q^2$.

- 1) Найдите функцию спроса на мебель.
- 2) Какое количество комплектов мебели и по какой цене продаст мебельный завод, если он максимизирует прибыль?
- 3) Производство мебели является достаточно неэкологичным процессом. Во время обработки древесины возникают отходы, которые сбрасываются заводом в ближайшее озеро. Отходы производства загрязняют воду и портят экологию. Жители города терпят экологический ущерб в размере $L = 1.5d$, где d – количество литров производственных отходов, которые сбрасываются в озеро, а при производстве q комплектов мебели (q – необязательно целое) образуется $d = 0.5q^2$ литров отходов. Какой ущерб наносит мебельный завод местной экологии?
- 4) Мэрия города желает сократить отрицательный внешний эффект для экологии от производства мебели и поэтому решает лимитировать производство мебели. Какое количество мебели даст максимальное значение общественного благосостояния? Функция общественного благосостояния $SW = TU - L - TC$.
- 5) Чтобы заставить завод производить нужное количество мебели, мэрия города решила ввести экологический налог на отходы. Теперь завод должен платить t ден. Ед. За каждый литр сброшенных в воду отходов. Какую ставку налога необходимо установить мэрии, чтобы заставить завод производить оптимальное, с точки зрения максимизации общественного благосостояния, количество мебели? Чему равны налоговые сборы?

Задача 4. Новогодний салют

В жилом комплексе живет n семей с детьми. Каждая семья имеет одинаковый уровень достатка, равный w . Приближается Новый год, и совет дома решает устроить салют для детей. Проживающие в доме семьи характеризуются разной потребностью в салюте, функция полезности семьи i имеет вид: $U_i = a_i \ln C + x_i$, где C – количество залпов салюта в новогоднюю ночь, а x_i – количество денег, оставшееся после оплаты салюта. Если семья желает внести свой вклад s_i в оплату расходов на салют, то $x_i = w - s_i$.

Количество залпов салюта зависит от количества собранных денег:

$$C = \sum_{i=1}^n s_i$$

Все семьи отличаются параметром a_i и упорядочены следующим образом в последовательность: $0 = a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = 1$.

- 1) Салют является общественным благом, и поэтому могут возникнуть проблемы со сбором средств на его проведение. Объясните, какие проблемы здесь имеют место?
- 2) Пусть взносы на салют являются добровольными. Все ли семьи в итоге решат внести свой вклад в оплату салюта? Какое количество средств будет собрано и какое количество залпов будет сделано?
- 3) Совет дома решает устроить голосование по поводу проведения салюта. Если большинство из n семей проголосует за салют, то его обязательно проведут, а затраты поровну распределят среди всех семей в доме. Допустим, n нечетное и поэтому результат голосования будет зависеть от медианного избирателя, то есть семьи с серединым значением параметра a_i . Пусть такая семья описывается значением a_m . Какое количество залпов салюта будет в новогоднюю ночь в таком случае?

- 4) Совет дома в одностороннем порядке принимает решение, что салют должен состояться и все затраты поровну делятся между всеми семьями. Совет дома максимизирует общую функцию полезности:

$$SW = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n (a_i \ln C + x_i)$$

Какое количество залпов салюта будет произведено?

- 5) Найдите количество залпов салюта, если совет дома максимизирует функцию полезности: $SW = \min\{U_i\}_{i=\overline{1,n}} = \min\{a_i \ln C + x_i\}_{i=\overline{1,n}}$, то есть стремится улучшить положение той семьи, которая получает наименьшую полезность.