



7 класс

10 апреля 2020 года

Время написания – 240 минут

Количество задач – 4

Сумма баллов – 100

Заключительный этап Московской олимпиады школьников – 2021 по экономике

Решения и критерии проверки

Задача 1. «Чемпионские тарталетки» (25 баллов)

По случаю успешного завершения учебного года дочерью Лёлей семья Б. решила устроить огромный званый вечер для всех участников Заключительного этапа всероссийской олимпиады школьников по экономике (а таких участников в этом году особенно много). Посовещавшись, члены семьи решили, что им для угощения гостей необходимо приготовить множество тарталеток с разнообразной начинкой. У семьи есть один тарталетный аппарат, работать за которым может одновременно только один член семьи (однако они могут сколько угодно раз сменять друг друга в любое время – если посчитают это необходимым).

(а) На изготовление одной тарталетки с помощью тарталетного аппарата Лёля тратит 4 минуты, но, если он изготовит не менее 100 тарталеток, то на каждую следующую (после 100) тарталетку будет тратить всего лишь 2 минуты (Лёля хорошо умеет учиться). Мама Лёли работает с постоянной скоростью и делает на тарталетном аппарате одну тарталетку за три минуты вне зависимости от количества сделанного. Мама и Лёля имеют множество других дел, которое может выполнить любая из них, поэтому их главная задача – минимизировать время на изготовление тарталеток.

Пусть тарталеток нужно изготовить ровно X . Сколько времени на это уйдёт? (запишите ответ в виде зависимости времени (T) от количества тарталеток (X)).

(б) Семья еще не успела приступить к изготовлению тарталеток, а Мама Лёли вспомнила, что ей необходимо успеть приготовить торт в виде диплома победителя всероссийской олимпиады школьников (ведь сами дипломы пока не выдали), поэтому вместо неё изготовлением тарталеток вместе с Лёлей займётся её Папа. Папа более сноровист, нежели дочь: каждую тарталетку он изготавливает всего за 3 минуты, но, сделав 300 тарталеток, он сможет найти новые функции на тарталетного аппарата и будет тратить на каждую дополнительную (свыше 300) тарталетку всего по одной минуте (Лёля про кнопки ничего не знает, а Папа ей не скажет – умница-дочь должна учиться сама!). Лёля и её папа также стараются потратить на изготовление тарталеток как можно меньше времени.

Если им нужно изготовить всё те же X тарталеток, за сколько времени управятся они? (запишите ответ в виде зависимости времени (T) от количества тарталеток (X)).

Решение и критерии оценивания

Все зависимости потраченного времени от количества сделанных тарталеток будем называть функциями издержек.

(а) Запишем функцию издержек Мамы $T_M = 3X$

(1 балла)

Функция издержек Лёли при $X \leq 100$ имеет вид $T_L = 4X$,

(1 балл)

а при $X > 100$ $T_L = 4 \cdot 100 + 2(X - 100) = 2X + 200$

(2 балла)

Тогда при $X \leq 100$ все тарталетки должна делать Мама (т.к. она производительнее Лёли). Если $X > 100$ тарталетки быстрее делает Лёля, но для этого она должна сделать 100 первых тарталеток медленно». Поэтому, если тарталеток «мало», всё делает Мама, а если «много» – Лёля.
(2 балла за обоснование)

Найдём, при каком количестве тарталеток кто их делает.

Тарталетки делает Мама, если $3X \leq 2X + 200$ (1 балл за уравнение или неравенство)
 $X \leq 200$ (1 балл за ответ)

Альтернативное обоснование: так как на первых 100 штуках мама на 1 минут быстрее (за штуку, чем Лёля), а на следующих – быстрее Лёля (и опять же – на 1 минуту за штуку), то, чтобы компенсировать «отставание», Лёле нужно сделать ещё не меньше 100 штук, то есть всего – не меньше 200 тарталеток. Поэтому, если тарталеток нужно не больше 200, то их делает мама, а если больше, то Лёля. (4 балла за обоснование вместо обоснования и решения неравенства)

Таким образом функция издержек имеет вид:

$$T = \begin{cases} 3X, & X \leq 200 \\ 2X + 200, & X > 200 \end{cases} \quad (\text{по 2 балла за каждую строку})$$

Всего за пункт (а) до 12 баллов

(б) Запишем функцию издержек Папы

Функция издержек Папы при $X \leq 300$ имеет вид $T_{\text{П}} = 3X$,
а при $X > 300$ $T_{\text{П}} = 3 \cdot 300 + (X - 300) = X + 600$ (2 балла за функцию)

Тогда, аналогично предыдущему пункту при $X \leq 200$ все тарталетки должен делать Папа (т.к. он производительнее Лёли).

(2 балла за обоснование аналогии с п (а) или нахождение точки $X = 200$ аналогично п (а))

Если $300 \geq X > 200$ тарталетки быстрее делает Лёля. Если же тарталеток нужно сделать больше, чем 300, папа начинает «догонять» Лёлю, так как на каждую дополнительную тарталетку будет тратить на минуту меньше, чем она. Поэтому, если тарталеток больше 300, но «мало», их все делает Лёля, а если «много» – Папа. (2 балла за обоснование)

Найдём, при каком количестве тарталеток кто их делает.

Тарталетки делает Лёля, если $2X + 200 \leq X + 600$ (1 балл за уравнение или неравенство)
 $X \leq 400$ (1 балл за ответ)

Альтернативное обоснование: аналогично обоснованию пункта (а) найдём «пороговое» значение $X = 400$ (4 балла за обоснование вместо обоснования и решения неравенства)

Таким образом функция издержек имеет вид:

$$T = \begin{cases} 3X, & X \leq 200 \\ 2X + 200, & 400 \geq X > 200 \\ X + 600, & X > 400 \end{cases} \quad (\text{1 балл за первый участок, по 2 балла за второй и третий участки})$$

Всего за пункт (б) до 13 баллов

Задача 2. «Неравенство Изумрудии» (20 баллов)

Жители Изумрудии разделены две неравные группы населения: Ричей и Пууров. Ричей в Изумрудии живет ровно в 4 раза меньше, чем Пууров, а доход каждого Рича ровно в 5 раз больше, чем доход любого из Пууров. По заказу правителя Изумрудии Вам необходимо изучить социально-экономическую обстановку в стране, ответив на следующие вопросы:

(а) Какую долю от общего дохода всех жителей Изумрудии составляет доход всех Ричей?

(б) На сколько процентов доход всех Ричей больше, чем доход всех Пууров?

(в) На сколько процентов доход всех Пууров меньше, чем доход всех Ричей?

(г) После длительных переговоров Изумрудия и Аметистия основали Изумрудно-Аметистовый Единый Союз (ИАЕС). Известно, что численность населения Аметистии в 2 раза превышает количество Ричей в Изумрудии. При этом доход каждого жителя Аметистии равен среднему доходу одного жителя Изумрудии. Какую долю от общего дохода всех жителей Единого Союза составляет суммарный доход жителей Аметистии?

Решение и критерии оценивания

(а) Обозначим количество Ричей в Изумрудии за X . Тогда количество Пууров равно $4X$ (1 балл)

Обозначим доход каждого Пура за Y . Тогда доход каждого Рича равен $5Y$ (1 балл)

Тогда общий доход Ричей равен $5XY$, Пуров – $4XY$, всех жителей Изумрудии – $9XY$ (2 балла)

Информацию удобно оформить в виде таблицы:

	Ричи	Пуры	Все жители Изумрудии
Численность	X	$4X$	$5X$
Доход каждого	$5Y$	Y	-
Общий доход	$5XY$	$4XY$	$9XY$

Тогда доход Ричей составляет от всех доходов долю, равную $\frac{5XY}{9XY} = 5/9$ (4 балла)

Ответ, переведенный в проценты и округлённый каким-либо образом (штраф 2 балла)

Вычислительная ошибка (штраф 1 балл)

(б) Разница между доходами Ричей и Пуров равна $5XY - 4XY = XY$.

Тогда доход Ричей больше дохода Пуров на $\frac{XY}{4XY} \cdot 100\% = 25\%$ (3 балла)

При неверном (из-за вычислительной ошибки) ответе, полученном в пункте (а), и верном решении пункта (б) за пункт (б) выставляется полный балл.

(в) Разница между доходами Ричей и Пуров равна $5XY - 4XY = XY$.

Тогда доход Пуров меньше дохода Ричей на $\frac{XY}{5XY} \cdot 100\% = 20\%$ (2 балла)

При неверном (из-за вычислительной ошибки) ответе, полученном в пункте (а), и верном решении пункта (в) за пункт (в) выставляется полный балл.

(г) С учетом условия численность населения Аметистии равна $2X$

Средний доход одного жителя Изумрудии равен $\frac{9XY}{5X} = \frac{9Y}{5}$ или $1,8Y$ (2 балла)

Тогда доход всех жителей Аметистии равен $\frac{18XY}{5}$ или $3,6XY$ (1 балл)

Доход всех жителей Единого Союза равен $9XY + \frac{18XY}{5} = \frac{45XY + 18XY}{5} = \frac{63XY}{5}$
или $9XY + 3,6XY = 12,6XY$ (1 балл)

Тогда доля дохода всех жителей Аметистии от суммарного дохода всех жителей Единого Союза равна $\frac{\frac{18XY}{5}}{\frac{63XY}{5}} = \frac{18XY}{63XY} = \frac{2}{7}$ (тот же результат можно получить, поделив $3,6XY$ на $12,6XY$) (3 балла)

Альтернативное решение пункта (г)

Так как средний доход каждого жителя равен среднему доходу каждого жителя Изумрудии, соотношение суммарных доходов жителей будет равно соотношению количества жителей (4 балла за замечание)

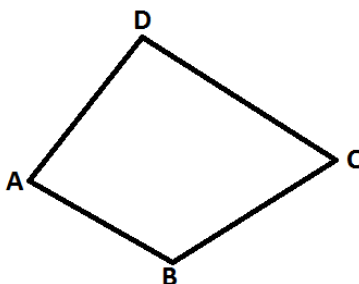
Численность населения Аметистии равна $2X$, а численность населения Единого Союза равна $7X$

Тогда доля дохода всех жителей Аметистии от суммарного дохода всех жителей Единого Союза равна $\frac{2X}{7X} = \frac{2}{7}$ (3 балла)

Задача 3. «Дороги, которые выбирают чемпионы» (30 баллов)

В королевстве Мурляндия есть всего 4 города (А, В, С и D), в каждом из которых проживает одинаковое количество человек. Если последовательно соединить эти города дорогами (которые пока что не построили), то схема страны будет напоминать форму выпуклого четырехугольника (см. рисунок 1).

Рис. 1. Карта Мурляндии



Король Мурляндии собирается построить завод, с которого ежедневно будут развозить ценный витамин, предназначенный для каждого жителя страны (после рейса все машины, развозящие витамин, должны возвращаться на завод). Король Мурляндии Мурмур XXVII точно понимает, что завод нужно разместить в какой-то точке на плоскости, ограниченной сторонами четырехугольника (возможно, в каком-то из городов, возможно – на стороне четырехугольника, а, возможно, где-то в другом месте).

Завод необходимо соединить дорогами с каждым из городов, при этом экономный Король очень хочет, чтобы сумма длин дорог (то есть сумма расстояний от завода до городов) была минимальной. Советники Мурмура XXVII отчаялись: они никак не могут выбрать место для строительства завода и уже готовятся принять королевскую кару. Неожиданно на помощь советникам пришел победитель Всероссийской олимпиады школьников по экономике великолепный Михаил Т., находившийся в Мурляндии проездом.

Узнав пожелания короля и взглянув на рисунок, Михаил не только смог правильно определить, где следует построить завод, но и доказал, почему нужно поступить именно так. Когда советники шепотом спросили Михаила, как ему это удалось, он рассказал, что внимательно изучил схему страны и вспомнил, что узнал на уроках геометрии в 7 классе.

Последуйте примеру Михаила Т., определив, где следует построить завод, и доказав, что это место – лучшее (будьте внимательны: такое место может быть одно, но их может быть и несколько).

Решение и критерии оценивания

Рассмотрим идеи размещения завода:

1) *Размещение завода относительно точек A и C.* Пусть завод находится в точке M на отрезке AC. Тогда сумма расстояний от завода до городов A и C равна $AM + CM = AC$.

Если завод находится в точке N, не принадлежащей отрезку AC (в том числе на сторонах четырёхугольника), сумма расстояний $AN + CN > AC$ в соответствии с неравенством треугольника (принимается любое обоснование с использованием идеи о том, что сумма длин двух сторон треугольника больше, чем длина третьей стороны) **(15 баллов)**

2) *Размещение завода относительно точек B и D.* Аналогично, если завод находится в точке K на отрезке BD, сумма расстояний от завода до городов B и D равна $BK + DK = BD$, что меньше, чем $BZ + DZ$, если завод находится в точке Z, не принадлежащей отрезку BD **(7 баллов)**

Для получения 22 баллов достаточно корректно доказать, что завод должен находиться в любой точке на одной из диагоналей четырёхугольника и сослаться на этот факт для другой диагонали.

3) *Итоговое размещение завода.* Таким образом завод должен одновременно находиться и на отрезке AC, и на отрезке BD. Следовательно, единственная оптимальная точка размещения завода – точка пересечения отрезков AC и BD, то есть точка пересечения диагоналей **(8 баллов)**

Замечание: если участник указывает на то, что завод нужно разместить в точке пересечения диагоналей (т.е. отрезков AC и BD), но не обосновывает (или некорректно обосновывает) свое решение (т.е. «угадывает» верный ответ, но не доказывает правильность догадки) **(0 баллов)**

Задача 4. «Жёсткость масок» (25 баллов)

Известно, что во время пандемии власти многих стран и регионов вводят жёсткий санитарный режим: требование удалённой работы, ограничение перемещения людей по городу, жёсткий масочный режим, ограничение работы общественных мест (музеев, театров, кафе и т.д.).

(а) *Замечено, что в некоторых странах жители добровольно строго соблюдают установленные ограничения, в других же странах требования государства по ограничениям выполняются гражданами не столь тщательно.*

С чем могут быть связаны такие различия в поведении людей в разных странах?

(б) *Санитарные требования, установленные Мэрией Москвы, считаются достаточно жесткими, однако в некоторых регионах России требования властей к санитарному режиму являются значительно более жесткими, чем в Москве (например, если в Москве работают театры, кафе и рестораны т.д., то в некоторых регионах России большинство массовых мероприятий по-прежнему запрещены).*

Как вы можете объяснить различия в жёсткости санитарных мер в разных регионах России?

Решение и критерии оценивания

(а) Можно назвать много причин, объясняющих подобную разницу в добровольном соблюдении ограничений. В первую очередь, это институциональные причины (то есть система принципов взаимодействия, на которых построена жизнь в том или ином обществе: уважение к законам, привычка выполнять установленные правила и тд). Во-вторых, это уровень информированности об опасности и уровень доверия к предлагаемой информации. В-третьих, это уровень обеспеченности людей и уровень государственной поддержки людям, соблюдающим санитарные ограничения (например, бесплатная раздача масок и санитайзеров, материальная помощь в условиях самоизоляции и локдауна и тд).

Основные факторы, оцениваемые жюри:

- *уровень законопослушности;*
- *степень информированности населения об опасности пандемии;*
- *уровень обеспеченности населения*
- *уровень материальной поддержки населения государством.*

Если указана одна причина из списка – 6 баллов

Если указаны две причины из списка – до 14 баллов в зависимости от корректности аргументов

Каждая обоснованная причина не из списка – 3 балла (максимум 12 баллов)

(б) Среди причин, объясняющих подобные различия, можно назвать разный уровень развития эпидемии в регионах, разный уровень важности для региона отраслей, которые могли бы быть подвержены ограничениям, разный уровень развития медицины в регионе (чем выше развитие медицины, тем легче лечить больных и можно меньше ограничивать жизнь региона), федеративное устройство России, позволяющее властям субъектов Федерации проводить самостоятельную политику в части мер, разрешенных законами РФ

Основные факторы, оцениваемые жюри:

- *различия в возможностях системы здравоохранения;*
- *федеративное устройство России;*
- *разная вероятность заболеть в различных регионах;*
- *разная важность отраслей для региона.*

Если указана одна причина из списка – 5 баллов

Если указаны две причины из списка – 11 баллов

Каждая обоснованная причина не из списка – 3 балла (максимум 11 баллов)