

ПрОШ - 2021

Решения задач
Второй тур. Задачи. 9 класс
 19 декабря 2021 г.

**Задача 1. Автобус или метро?****(30 баллов)**

В некотором городе живет 2 группы жителей, пользующихся общественным транспортом. 40% жителей готовы заплатить за месячный проездной на метро 2500 руб., а на наземный транспорт – только 750 руб. 60% жителей же, напротив, проездной на метро оценивают в 1200 руб., а на наземный транспорт – в 1800 руб. При этом транспортная компания, обеспечивающая перевозки, может выпускать либо отдельные проездные на метро и наземный транспорт, либо единый – на все виды транспорта. Сколько процентов выручки потеряет транспортная компания, если она откажется от выпуска единого проездного?

Решение

Для того, чтобы оценить потери, нужно найти оптимальные цены проездных в обеих ситуациях и подсчитать соответствующую выручку. Начнем с отдельного проездного на метро. 40% людей готовы заплатить за него 2500 руб., а 60% – 1200 руб. Заметим, что никакие цены кроме 1200 и 2500 устанавливать не имеет смысла, доход будет ниже, а новых покупателей не добавится (**5 баллов**). Оценим, какой вариант лучше. При цене 1200 руб. покупать проездной на метро будет всё население города в количестве N человек, выручка при этом составит $1200N$. При цене 2500 руб. проездной купит только 40% населения, и выручка уменьшится: $2500 \cdot 0,4N = 1000N < 1200N$. Поэтому оптимальным будет первый вариант с ценой 1200 руб. для всех (**7 баллов**).

Проездной на наземный транспорт 40% жителей города готовы купить за 750 руб., а 60% – за 1800 руб. Если продавать проездной всем, придется снизить цену до 750, выручка при этом составит $750N$. Если же поднять цену до 1800, купит проездной только 60%, но выручка увеличится до $1800 \cdot 0,6N = 1080N > 750N$ (**5 баллов**). Таким образом, правильно устанавливая цены на отдельные проездные, транспортная компания может получить сумму $1200N + 1080N = 2280N$ (**3 балла**).

Если компания продает единый проездной, то 40% населения будет готово купить его за $2500 + 750 = 3250$ руб., а 60% населения – за $1200 + 1800 = 3000$ (**4 балла**). Очевидно, нужно ставить цену 3000 руб., продавать проездной всем и получать выручку $3000N$, что больше $3250 \cdot 0,4N = 1300N$ (**3 балла**). Таким образом, выручка в случае продажи отдельных проездных составит $\frac{2280N}{3000N} = 0,76 = 76\%$, то есть окажется ниже на 24% (**3 балла**).

Задача 2. Добро пожаловать в рай!**(30 баллов)**

Небольшое островное государство Исла Парадайз разделено на три региона: Сансет Вэлли, Риверсайд и Бриджпорт. В стране производятся только сети для ловли рыбы и паруса для кораблей. Кривая производственных возможностей (КПВ) Сансет Вэлли описывается уравнением $y_1 = 10 - x_1$, КПВ Риверсайда – $y_2 = 10 - 0,5x_2$, КПВ Бриджпорта – $y_3 = 20 - 2x_3$, где x_i – сети для ловли рыбы, а y_i – паруса для кораблей.

- а) (10 баллов) Постройте суммарную КПВ Исла Парадайз.
- б) (10 баллов) Известно, что жители Исла Парадайз всегда покупают сети и паруса в пропорции 2 к 3. Сколько сетей для ловли рыбы и парусов для кораблей будет производиться в каждом регионе?
- в) (10 баллов) Предположим, что предпочтения жителей острова изменились. Теперь они покупают сети и паруса в пропорции 3 к 2. На сколько изменится суммарное производство сетей и парусов по сравнению с предыдущим пунктом?

Решение

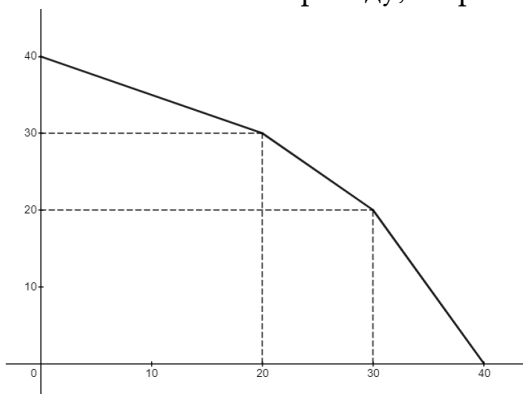
а) Заметим, что альтернативные издержки производства x в регионах следующие:

в Сансет Вэлли – $AC_x = 1$;

в Риверсайде – $AC_x = 0.5$;

в Бриджпорте – $AC_x = 2$.

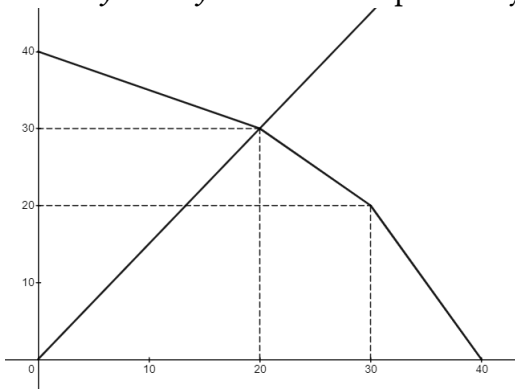
Построим суммарную КПВ в соответствии с правилом, что альтернативные издержки возрастают с ростом производства. Значит (слева – направо) первый участок КПВ будет соответствовать Риверсайду, второй – Сансет Вэлли, третий – Бриджпорту.



Можем записать в алгебраическом виде:

$$y = \begin{cases} 40 - 0.5x, & 0 \leq x \leq 20 \\ 50 - x, & 20 \leq x \leq 30 \\ 80 - 2x, & 30 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

б) Потребление x и y в пропорции 2 к 3 можно формализовать с помощью уравнения $3x = 2y$ или $y = 1.5x$. Построим эту прямую на графике и найдем пересечение с КПВ.



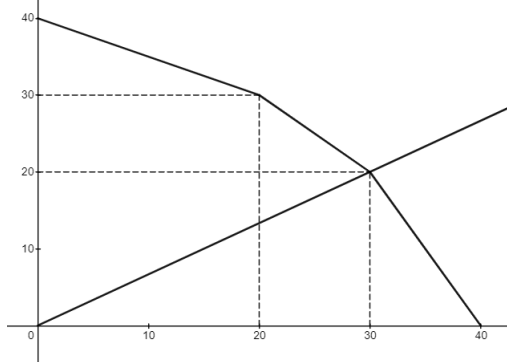
Видно, что пересечение соответствует точке $(20; 30)$, значит на острове Исла Парадайз производится 20 сетей для ловли рыбы и 30 парусов для кораблей.

Осталось определить, сколько каждого товара производится в каждом регионе. Заметим,

что точка $(20; 30)$ – это точка излома, иначе говоря – это крайняя правая точка для участка КПВ, соответствующего региону Риверсайд, и крайняя левая точка для участка КПВ, соответствующего региону Сансет Вэлли. Значит все сети для ловли рыбы производятся Риверсайдом, а все паруса для кораблей – Сансет Вэлли и Бриджпортом (по 10 парусов в каждом).

Ответ: в Сансет Вэлли – 0 сетей и 10 парусов,
в Риверсайте – 20 сетей и 0 парусов,
в Бриджпорте – 0 сетей и 10 парусов.

- в) Потребление x и y в пропорции 3 к 2 можно формализовать уравнением $2x = 3y$ или $y = \frac{2}{3}x$. По аналогии с предыдущим пунктом построим эту прямую на графике и найдем пересечение с КПВ.



Видно, что пересечение соответствует точке $(30; 20)$. Суммарно производится 50 сетей и парусов, ровно как и в предыдущем пункте, поэтому ответ – суммарное производство не изменилось.

Задача 3. Классика

(30 баллов)

На совершенно-конкурентном рынке в краткосрочном периоде спрос представлен функцией $Q^d = 200 - 5P$, а предложение предъявляют 80 одинаковых фирм с издержками $TC_i = 2q_i^2 + 10q_i + 2021$, где q_i – выпуск отдельной фирмы.

а) (6 баллов) Найдите равновесную цену, объем продаж и прибыль каждой фирмы на рынке.

б) (14 баллов) Государство ввело налог на выручку производителей: каждая фирма обязана заплатить долю t от получаемой выручки в виде налога. Найдите ставку налога, при которой государство получает максимальные налоговые сборы.

в) (10 баллов) Найдите ставку налога, при которой суммарные излишки потребителей и производителей будут равны.

Решение

а) Выведем предложение. Поскольку рынок является совершенно конкурентным, приравняем P (цену) и MC (предельные издержки).

$$MC = 4q + 10 = P$$

$$q = \frac{P - 10}{4}$$

Получили предложение одной фирмы, тогда совокупное предложение на рынке составит:

$$Q_s = 80q = 20P - 200$$

Теперь найдем равновесие, приравняв спрос и предложение:

$$20P - 200 = 200 - 5P$$

$$P^* = 16, Q^* = 120, q^* = 1,5$$

Осталось найти прибыль одной фирмы.

$$\Pi = TR - TC = P^* \cdot q^* - 2(q^*)^2 - 10q^* - 2021 = 16 \cdot 1,5 - 2 \cdot (1,5)^2 - 10 \cdot 1,5 - 2021 = -2016,5$$

- б) Заметим, что налог на выручку полностью эквивалентен акцизу. Действительно, $TR_s = P_s Q = (1 - t)TR_d = (1 - t)P_d Q$, тогда $P_s = (1 - t)P_d$ или $P_d - P_s = tP_d$.

Итак, мы поняли, что налог на выручку – это то же самое, что акциз. Далее, из эквивалентности налогов, максимальные налоговые сборы достигаются при единственных значениях P_d и P_s . Тогда найдем эти значения через потоварный налог.

Мы знаем, что оптимум потоварного налога: $t_p = \frac{P_{max} - P_{min}}{2} = \frac{40 - 10}{2} = 15$. Введем данный потоварный налог для нахождения P_d и P_s :

$$200 - 5(P_s + 15) = 20P_s - 200$$

$$325 = 25P_s$$

$$P_s = 13, P_d = 28$$

Теперь связка для акциза: $P_d - P_s = t_a P_d$ или $15 = 28t_a$, тогда $t_a = 15/28 = \frac{15}{28}$.

- в) Будем действовать аналогично. Будем вводить потоварный налог, а из него восстанавливать величину акциза, которая равна налогу на выручку. Пусть t – потоварный налог.

$$200 - 5P_d = 20(P_d - t) - 200$$

$$P_d = 16 + 0.8t \quad P_s = 16 - 0.2t$$

Тогда посчитаем зависимость излишков от величины t :

$$CS = 1.6(30 - t)^2$$

$$PS = 0.4(30 - t)^2$$

Заметим, что ставка потоварного налога, при котором достигается равенство не меньше 30. Тогда

$$P_d - P_s = 30 = 40t_a$$

$$t_a = 0.75$$

Тогда ответ: $t_a \geq 0.75$

Задача 4. Вполне прозрачная экономика**(30 баллов)**

Рассмотрим экономику, которая состоит из двух секторов – промышленное производство и сельское хозяйство. Также для простоты предположим, что промышленность находится в городе, а сельское хозяйство – в сельской местности. В сельской местности живет 45 млн. человек, а в городе – 15 млн. человек. На рынке промышленной продукции действует 10 фирм, производственная функция каждой из которых $Y = 25L_y - 2.5L_y^2$, где Y – количество производимого товара в промышленном секторе в день в млн. штук, а L_y – количество работающих людей в млн. человек. Продукцию сельского хозяйства также производят 10 фирм, производственная функция каждой из которых $X = 70L_x - 5L_x^2$, где X – количество собранного зерна в день в млн. кг, а L_x – количество работающих людей в млн. человек. Цена одного товара промышленного сектора равна 4 рублям, а цена одного килограмма зерна равна 1 рублю.

Каждый человек в стране понимает, что лучше работать, чем не работать, поэтому каждый житель города и сельской местности готов работать за любую положительную зарплату. Рынки труда и конечной продукции обоих секторов совершенно-конкурентны.

а) Какие зарплаты установятся в двух секторах в равновесии в отсутствии мобильности труда между городом и сельской местностью?

б) С 1 января государство решило упростить процедуру миграции, поэтому теперь люди могут свободно перемещаться между городом и сельской местностью. Какие зарплаты установятся в двух секторах в равновесии в этом случае?

в) Как изменится ответ на вопрос пункта б), если для каждого человека миграция связана с издержками в 15 рублей в день на аренду кровати в общежитии. Какие установятся зарплаты в городе и в сельской местности в равновесии теперь?

Решение

а) Поехали. Для начала запишем обратный спрос на труд в промышленности

$$MRP_{L_y} = P_y \cdot MP_{L_y} = 100 - 20L_y = w_y$$

$$L_y = \frac{100 - w_y}{20} \Rightarrow L_y^d = 50 - \frac{w_y}{2} \Rightarrow w_y = 100 - 2L_y^d$$

Мы знаем, что там точно будет работать 15 млн. человек (вертикальное предложение). Значит зарплата будет равна $100 - 2 \cdot 15 = 70$.

Спрос на труд в сельском хозяйстве

$$MRP_{L_x} = P_x \cdot MP_{L_x} = 70 - 10L_x = w_x$$

$$L_x = \frac{70 - w_x}{10} \Rightarrow L_x^d = 70 - w_x \Rightarrow w_x = 70 - L_x^d$$

Мы знаем, что там точно будет работать 45 млн. человек (вертикальное предложение). Значит зарплата будет равна $70 - 45 = 25$.

Ответ: зарплата в промышленности будет равна 70 руб., в сельском хозяйстве – 25 руб.

б) В этом случае зарплаты в двух секторах должны быть равны, иначе начнется миграция.

$$w_x = w_y$$

$$100 - 2L_y = 70 - L_x$$

$$L_x = 2L_y - 30$$

$$L_x + L_y = 60$$

$$3L_y - 30 = 60$$

$$L_y = 30 \Rightarrow w_x = w_y = 100 - 2 \cdot 30 = 40.$$

Ответ: зарплата равна 40 руб. в обоих секторах.

- в) Миграция происходит из сельской местности в город. Следовательно, платить за кровать будут в городе, поэтому зарплата в городе должна быть на 15 единиц больше, чтобы работнику было без разницы, где работать. Если это не так, то это не равновесие и начинается миграция.

$$w_y - 15 = w_x$$

$$85 - 2L_y = 70 - L_x$$

$$L_x = 2L_y - 15$$

$$L_x + L_y = 60$$

$$3L_y - 15 = 60$$

$$L_y = 25 \Rightarrow w_y = 100 - 2 \cdot 25 = 50$$

$$w_x = 35.$$

Ответ: зарплата равна 50 руб. в городе и 35 руб. в сельской местности.