ПрОШ - 2021

Решения задач
Второй тур. Задачи. 7-8 классы
19 декабря 2021 г.

Задача 1. Пробки (30 баллов)

Пусть из спального микрорайона в центр города проложены две дороги – Северная и Южная. Каждое утро по ним едет фиксированное число автомобилистов. При этом из-за возможных пробок время движения зависит от того, сколько людей выберет каждую из дорог. По Северной можно добраться за $25 + 30x_1$ мин., по Южной – за $15 + 70x_2$ мин., где x_1 и x_2 – доли едущих по ним автомобилистов. Предположим, что люди выбирают дорогу, исходя из единственного критерия – желания добраться побыстрее. На сколько минут сократится ожидаемое время в пути, если Северную дорогу расширить втрое? На сколько процентов при этом изменится число автомобилистов на Северной и Южной дорогах.

Решение

Если люди минимизируют затраты времени, то в равновесии время движения по обеим дорогам должно быть одинаково **(5 баллов)**. В противном случае найдутся те, кто захочет изменить свое поведение, сделав выбор в пользу более быстрой из дорог. В исходной ситуации это приводит к равенству $25+30x_1 = 15+70x_2$. Поскольку суммарная доля едущих по Северной и Южной дорогам составляет 100% (то есть $x_1 + x_2 = 1$), условие примет вид $25+30x_1 = 15+70(1-x_1)$ **(3 балла)**. Отсюда можно найти доли $x_1 = 0{,}6 = 60\%$ и $x_2 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4 = 40\%$ **(2 балла)**.

Если Северную дорогу расширить втрое, то втрое уменьшится дополнительное время передвижения, связанное с пробками. Например, если по расширенной втрое дороге поедет 60% машин (по каждой полосе 20%), то это будет эквивалентно по времени ситуации с 20% машин до расширения дороги. Таким образом, время передвижения по Северной дороге станет равным $25 + 10x_1$ **(6 баллов)**. В равновесии снова будет наблюдаться равенство: $25 + 10x_1 = 15 + 70(1 - x_1)$, откуда находим новые доли $x_1 = 0{,}75 = 75\%$ и $x_2 = 1 - 0{,}75 = 0{,}25 = 25\%$ **(4 балла)**.

Время передвижения можно найти, подставив равновесную долю в любую из частей уравнения. В исходной ситуации ожидаемое время составляет $25 + 30 \cdot 0{,}6 = 43$ мин., в новой ситуации оно станет равным $25 + 10 \cdot 0{,}75 = 32{,}5$ мин. Таким образом, расширение дороги привело к сокращению времени в пути на 10,5 мин. **(5 баллов)**.

Доля автомобилистов, едущих по Северной дороге выросла с 60 до 75 процентов. Это означает увеличение в $\frac{75}{60} = 1{,}25$ раза, то есть на 25%. Доля автомобилистов, выбирающих Южную дорогу, напротив, упала с 40 до 25 процентов, изменение произошло в $\frac{25}{40} = 0{,}625$ раза, то есть число автомобилистов стало меньше на 37,5% **(5 баллов)**. Отметим, что в условии спрашивается про проценты, а не процентные пункты, поэтому ответ выросла на 15% и упала на 15% является неправильным.

Задача 2. Он улетел, но обещал вернуться (30 баллов)

Карлсон, после того как улетел от маленького мальчика, решил заняться выращиванием фруктов, а именно яблок и груш. Так случилось, что в месте куда он улетел, с одной яблони за год можно было собрать лишь одно яблоко, а с дерева груши – только одну грушу. У Карлсона было 100 рублей, причем саженец дерева груши стоил 5 рублей, а саженец яблони – 20 рублей. При этом вся грядка Карлсона имела площадь 30 квадратных метров. Одно дерево груши занимало площадь 2 квадратных метра, а одна яблоня – 3 квадратных метра.

Карлсон больше всего на свете любит фрукты и хочет их съесть через год как можно больше. Какое максимальное количество фруктов съест Карлсон?

Примечание: Предполагается, что количество деревьев (а, как следствие, и фруктов) может быть только целочисленным.

Решение

Обозначим за x – количество яблок, а за y – количество груш. Заметим, что количество груш и яблок совпадает с количеством грушевых и яблочных деревьев.

Очевидно, что Карлсон не может потратить больше 100 рублей на саженцы. То есть всё, что он потратит на яблоки ($20 \times x$), вместе с тем, что он потратит на груши ($5 \times y$), не должно превышать 100. Таким образом, получаем неравенство $20x + 5y \leqslant 100$.

Также очевидно, что Карлсон не может использовать больше 30 квадратных метров площади грядки. То есть всё, что он потратит на яблоки ($3 \times x$), вместе с тем, что он потратит на груши ($2 \times y$), не должно превышать 30. Таким образом, получаем неравенство $3x + 2y \leqslant 30$.

Карлсон пытается увеличить количество фруктов, которые он съест, то есть максимизирует выражение $x + y$.

Таким образом получаем систему:

$$\begin{cases} 20x + 5y \leqslant 100, \\ 3x + 2y \leqslant 30, \\ x + y \longrightarrow max. \end{cases}$$

Решение этой системы $x^* = 0,\ y^* = 15,\ x^* + y^* = 15$.

Задача 3. Автобус или метро? (30 баллов)

В некотором городе живет 2 группы жителей, пользующихся общественным транспортом. 40% жителей готовы заплатить за месячный проездной на метро 2500 руб., а на наземный транспорт – только 750 руб. 60% жителей же, напротив, проездной на метро оценивают в 1200 руб., а на наземный транспорт – в 1800 руб. При этом транспортная компания, обеспечивающая перевозки, может выпускать либо отдельные проездные на метро и наземный транспорт, либо единый – на все виды транспорта. Сколько процентов выручки потеряет транспортная компания, если она откажется от выпуска единого проездного?

Решение

Для того, чтобы оценить потери, нужно найти оптимальные цены проездных в обеих ситуациях и подсчитать соответствующую выручку. Начнем с отдельного проездного на метро. 40% людей готовы заплатить за него 2500 руб., а 60% – 1200 руб. Заметим, что никакие цены кроме 1200 и 2500 устанавливать не имеет смысла, доход будет ниже, а новых покупателей не добавится **(5 баллов)**. Оценим, какой вариант лучше. При цене 1200 руб. покупать проездной на метро будет всё население города в количестве N человек, выручка при этом составит $1200N$. При цене 2500 руб. проездной купит только 40% населения, и выручка уменьшится: $2500 \cdot 0{,}4N = 1000N < 1200N$. Поэтому оптимальным будет первый вариант с ценой 1200 руб. для всех **(7 баллов)**.

Проездной на наземный транспорт 40% жителей города готовы купить за 750 руб., а 60% – за 1800 руб. Если продавать проездной всем, придется снизить цену до 750, выручка при этом составит $750N$. Если же поднять цену до 1800, купит проездной только 60%, но выручка увеличится до $1800 \cdot 0{,}6N = 1080N > 750N$ **(5 баллов)**. Таким образом, правильно устанавливая цены на отдельные проездные, транспортная компания может получить сумму $1200N + 1080N = 2280N$ **(3 балла)**.

Если компания продает единый проездной, то 40% населения будет готово купить его за $2500 + 750 = 3250$ руб., а 60% населения – за $1200 + 1800 = 3000$ **(4 балла)**. Очевидно, нужно ставить цену 3000 руб., продавать проездной всем и получать выручку $3000N$, что больше $3250 \cdot 0{,}4N = 1300N$ **(3 балла)**. Таким образом, выручка в случае продажи отдельных проездных составит $\frac{2280N}{3000N} = 0{,}76 = 76\%$, то есть окажется ниже на 24% **(3 балла)**.

Задача 4. Добро пожаловать в рай! **(30 баллов)**

Небольшое островное государство Исла Парадайз разделено на три региона: Сансет Вэлли, Риверсайд и Бриджпорт. В стране производятся только сети для ловли рыбы и паруса для кораблей. Кривая производственных возможностей (КПВ) Сансет Вэлли описывается уравнением $y_1 = 10 - x_1$, КПВ Риверсайда – $y_2 = 10 - 0{,}5x_2$, КПВ Бриджпорта – $y_3 = 20 - 2x_3$, где x_i – сети для ловли рыбы, а y_i – паруса для кораблей.

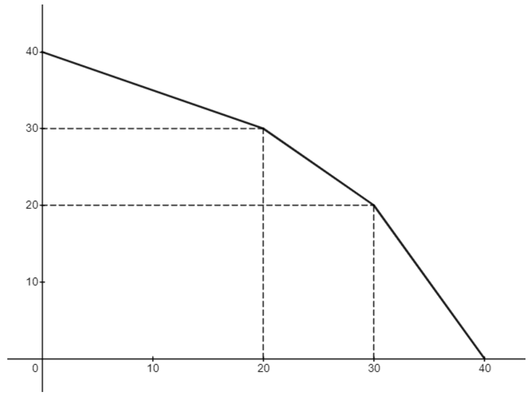
а) (10 баллов) Постройте суммарную КПВ Исла Парадайз.

б) (10 баллов) Известно, что жители Исла Парадайз всегда покупают сети и паруса в пропорции 2 к 3. Сколько сетей для ловли рыбы и парусов для кораблей будет производиться в каждом регионе?

в) (10 баллов) Предположим, что предпочтения жителей острова изменились. Теперь они покупают сети и паруса в пропорции 3 к 2. На сколько изменится суммарное производство сетей и парусов по сравнению с предыдущим пунктом?

Решение

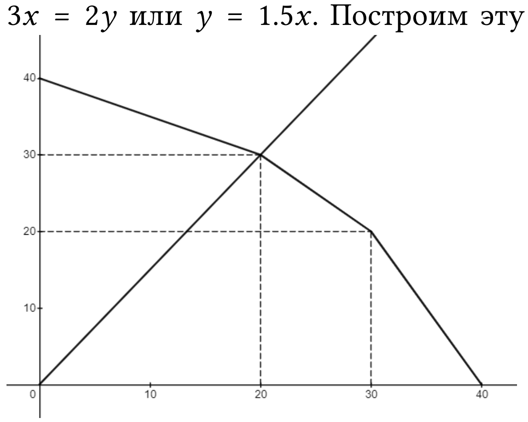
а) Заметим, что альтернативные издержки производства x в регионах следующие:
в Сансет Вэлли – $AC_x = 1$;
в Риверсайде – $AC_x = 0.5$;
в Бриджпорте – $AC_x = 2$.
Построим суммарную КПВ в соответствие с правилом, что альтернативные издержки возрастают с ростом производства. Значит (слева – направо) первый участок КПВ будет соответствовать Риверсайду, второй – Сансет Вэлли, третий – Бриджпорту.



Можем записать в алгебраическом виде:

$$y = \begin{cases} 40 - 0.5x, & 0 \leqslant x \leqslant 20 \\ 50 - x, & 20 \leqslant x \leqslant 30 \\ 80 - 2x, & 30 \leqslant x \leqslant 40 \end{cases}$$

б) Потребление x и y в пропорции 2 к 3 можно формализовать с помощью уравнения $3x = 2y$ или $y = 1.5x$. Построим эту прямую на графике и найдем пересечение с КПВ.

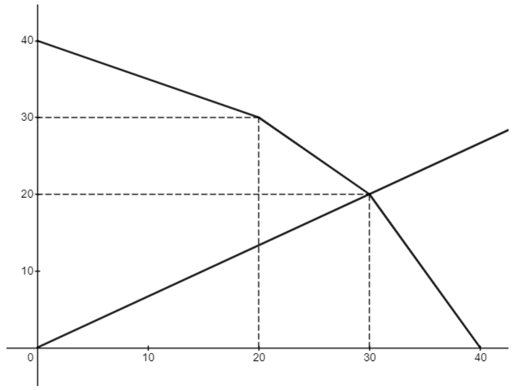


Видно, что пересечение соответствует точке (20; 30), значит на острове Исла Парадайз производится 20 сетей для ловли рыбы и 30 парусов для кораблей.

Осталось определить, сколько каждого товара прозводится в каждом регионе. Заметим, что точка (20; 30) – это точка излома, иначе говоря – это крайняя правая точка для участка КПВ, соответствующего региону Риверсайд, и крайняя левая точка для участка КПВ, соответствующего региону Сансет Вэлли. Значит все сети для ловли рыбы производятся Риверсайдом, а все паруса для кораблей – Сансет Вэлли и Бриджпортом (по 10 парусов в каждом).

Ответ: в Сансет Вэлли – 0 сетей и 10 парусов,
в Риверсайде – 20 сетей и 0 парусов,
в Бриджпорте – 0 сетей и 10 парусов.

в) Потребление x и y в пропорции 3 к 2 можно формализовать уравнением $2x = 3y$ или $y = \frac{2}{3}x$. По аналогии с предыдущим пунктом построим эту прямую на графике и найдем пересечение с КПВ.



Видно, что пересечение соответствует точке (30; 20). Суммарно производится 50 сетей и парусов, ровно как и в предыдущем пункте, поэтому ответ – суммарное производство не изменилось.