

## ПрОШ - 2021

Решения задач  
Второй тур. Задачи. 11 класс  
19 декабря 2021 г.



### Задача 1. Классика

(30 баллов)

На совершенно-конкурентном рынке в краткосрочном периоде спрос представлен функцией  $Q^d = 200 - 5P$ , а предложение предъявляют 80 одинаковых фирм с издержками  $TC_i = 2q_i^2 + 10q_i + 2021$ , где  $q_i$  – выпуск отдельной фирмы.

а) (6 баллов) Найдите равновесную цену, объем продаж и прибыль каждой фирмы на рынке.

б) (14 баллов) Государство ввело налог на выручку производителей: каждая фирма обязана заплатить долю  $t$  от получаемой выручки в виде налога. Найдите ставку налога, при которой государство получает максимальные налоговые сборы.

в) (10 баллов) Найдите ставку налога, при которой суммарные излишки потребителей и производителей будут равны.

### Решение

а) Выведем предложение. Поскольку рынок является совершенно конкурентным, приравняем  $P$  (цену) и  $MC$  (предельные издержки).

$$MC = 4q + 10 = P$$

$$q = \frac{P - 10}{4}$$

Получили предложение одной фирмы, тогда совокупное предложение на рынке составит:

$$Q_s = 80q = 20P - 200$$

Теперь найдем равновесие, приравняв спрос и предложение:

$$20P - 200 = 200 - 5P$$

$$P^* = 16, Q^* = 120, q^* = 1,5$$

Осталось найти прибыль одной фирмы.

$$\Pi = TR - TC = P^* \cdot q^* - 2(q^*)^2 - 10q^* - 2021 = 16 \cdot 1,5 - 2 \cdot (1,5)^2 - 10 \cdot 1,5 - 2021 = -2016,5$$

б) Заметим, что налог на выручку полностью эквивалентен акцизу. Действительно,  $TR_s = P_s Q = (1 - t)TR_d = (1 - t)P_d Q$ , тогда  $P_s = (1 - t)P_d$  или  $P_d - P_s = tP_d$ .

Итак, мы поняли, что налог на выручку – это то же самое, что акциз. Далее, из эквивалентности налогов, максимальные налоговые сборы достигаются при единственных значениях  $P_d$  и  $P_s$ . Тогда найдем эти значения через потоварный налог.

Мы знаем, что оптимум потоварного налога:  $t_p = \frac{P_{max} - P_{min}}{2} = \frac{40 - 10}{2} = 15$ . Введем данный потоварный налог для нахождения  $P_d$  и  $P_s$ :

$$200 - 5(P_s + 15) = 20P_s - 200$$

$$325 = 25P_s$$

$$P_s = 13, P_d = 28$$

Теперь связка для акциза:  $P_d - P_s = t_a P_d$  или  $15 = 28t_a$ , тогда  $t_a = 15/28 = \frac{15}{28}$ .

в) Будем действовать аналогично. Будем вводить потоварный налог, а из него восстанавливать величину акциза, которая равна налогу на выручку. Пусть  $t$  – потоварный налог.

$$200 - 5P_d = 20(P_d - t) - 200$$

$$P_d = 16 + 0.8t \quad P_s = 16 - 0.2t$$

Тогда посчитаем зависимость излишков от величины  $t$ :

$$CS = 1.6(30 - t)^2$$

$$PS = 0.4(30 - t)^2$$

Заметим, что ставка потоварного налога, при котором достигается равенство не меньше 30. Тогда

$$P_d - P_s = 30 = 40t_a$$

$$t_a = 0.75$$

Тогда ответ:  $t_a \geq 0.75$

**Задача 2. Вполне прозрачная экономика****(30 баллов)**

Рассмотрим экономику, которая состоит из двух секторов – промышленное производство и сельское хозяйство. Также для простоты предположим, что промышленность находится в городе, а сельское хозяйство – в сельской местности. В сельской местности живет 45 млн. человек, а в городе – 15 млн. человек. На рынке промышленной продукции действует 10 фирм, производственная функция каждой из которых  $Y = 25L_y - 2.5L_y^2$ , где  $Y$  – количество производимого товара в промышленном секторе в день в млн. штук, а  $L_y$  – количество работающих людей в млн. человек. Продукцию сельского хозяйства также производят 10 фирм, производственная функция каждой из которых  $X = 70L_x - 5L_x^2$ , где  $X$  – количество собранного зерна в день в млн. кг, а  $L_x$  – количество работающих людей в млн. человек. Цена одного товара промышленного сектора равна 4 рублям, а цена одного килограмма зерна равна 1 рублю.

Каждый человек в стране понимает, что лучше работать, чем не работать, поэтому каждый житель города и сельской местности готов работать за любую положительную зарплату. Рынки труда и конечной продукции обоих секторов совершенно-конкурентны.

а) Какие зарплаты установятся в двух секторах в равновесии в отсутствии мобильности труда между городом и сельской местностью?

б) С 1 января государство решило упростить процедуру миграции, поэтому теперь люди могут свободно перемещаться между городом и сельской местностью. Какие зарплаты установятся в двух секторах в равновесии в этом случае?

в) Как изменится ответ на вопрос пункта б), если для каждого человека миграция связана с издержками в 15 рублей в день на аренду кровати в общежитии. Какие установятся зарплаты в городе и в сельской местности в равновесии теперь?

г) Вернемся к условию пункта б). Работники, которые изначально были в городе, остались недовольны такой политикой и решили объединиться в профсоюз, который максимизирует совокупный трудовой доход всех городских работников (включая мигрантов) и назначает зарплату. Весь промышленный сектор должен будет выплачивать именно зарплату, назначенную профсоюзом. Какую зарплату установит профсоюз? Какая зарплата будет при этом в сельском хозяйстве?

**Решение**

а) Поехали. Для начала запишем обратный спрос на труд в промышленности

$$MRP_{L_y} = P_y \cdot MP_{L_x} = 100 - 20L_y = w_y$$

$$L_y = \frac{100 - w_y}{20} \Rightarrow L_y^d = 50 - \frac{w_y}{2} \Rightarrow w_y = 100 - 2L_y^d$$

Мы знаем, что там точно будет работать 15 млн. человек (вертикальное предложение). Значит зарплата будет равна  $100 - 2 \cdot 15 = 70$ .

Спрос на труд в сельском хозяйстве

$$MRP_{L_x} = P_x \cdot MP_{L_x} = 70 - 10L_x = w_x$$

$$L_x = \frac{70 - w_x}{10} \Rightarrow L_x^d = 70 - w_x \Rightarrow w_x = 70 - L_x^d$$

Мы знаем, что там точно будет работать 45 млн. человек (вертикальное предложение). Значит зарплата будет равна  $70 - 45 = 25$ .

**Ответ:** зарплата в промышленности будет равна 70 руб., в сельском хозяйстве – 25 руб.

б) В этом случае зарплаты в двух секторах должны быть равны, иначе начнется миграция.

$$w_x = w_y$$

$$100 - 2L_y = 70 - L_x$$

$$L_x = 2L_y - 30$$

$$L_x + L_y = 60$$

$$3L_y - 30 = 60$$

$$L_y = 30 \Rightarrow w_x = w_y = 100 - 2 \cdot 30 = 40.$$

**Ответ:** зарплата равна 40 руб. в обоих секторах.

в) Миграция происходит из сельской местности в город. Следовательно, платить за кровать будут в городе, поэтому зарплата в городе должна быть на 15 единиц больше, чтобы работнику было без разницы, где работать. Если это не так, то это не равновесие и начинается миграция.

$$w_y - 15 = w_x$$

$$85 - 2L_y = 70 - L_x$$

$$L_x = 2L_y - 15$$

$$L_x + L_y = 60$$

$$3L_y - 15 = 60$$

$$L_y = 25 \Rightarrow w_y = 100 - 2 \cdot 25 = 50$$

$$w_x = 35.$$

**Ответ:** зарплата равна 50 руб. в городе и 35 руб. в сельской местности.

г) Максимизируем выручку:

$$W_y L_y = 100L_y - 2L_y^2$$

Это парабола ветвями вниз, поэтому максимум – в вершине.

$$L_y = 25 \Rightarrow w_y = 50$$

$$L_x = 60 - 25 = 35 \Rightarrow w_x = 70 - 35 = 35.$$

**Ответ:** зарплата равна 50 руб. в промышленности (что больше чем 40, которые были бы без профсоюза) и 35 руб. в сельском хозяйстве.

**Задача 3. Олимпийка или олимпос?****(30 баллов)**

Фирма «Вершина» производит олимпийские куртки и имеет возможность осуществлять ценовую дискриминацию, продавая их по разным ценам на внутреннем и внешнем рынках. На внутреннем рынке фирма «Вершина» является монополистом и функция спроса на куртки имеет вид  $Q^d = 200 - P$ , на внешнем рынке фирма может продать любое количество курток по цене  $P_w = 160$ . Функция издержек фирмы «Вершина» на производство курток имеет вид  $TC = Q^2$ .

а) (5 баллов) Определите количество курток, которое продаст фирма «Вершина» на внутреннем и внешнем рынках.

б) Государство решило ввести потоварный налог на продажу олимпийских курток. Определите максимально возможные налоговые сборы государства, если налог введён

1. (5 баллов) На каждую куртку, проданную на внутреннем рынке;
2. (5 баллов) На каждую куртку, проданную на внешнем рынке;
3. (5 баллов) На каждую проданную куртку, вне зависимости от того, на каком рынке она продана.

в) (10 баллов) Какие налоговые сборы в пункте б) получились больше: суммарные налоговые сборы в пунктах 1 и 2 или налоговые сборы в пункте 3? Дайте экономическую интерпретацию полученного результата.

**Решение**

Приведем решение «в лоб» – через максимизацию прибыли. Также в данной задаче было возможно графическое решение через построение графика суммарного предложения для двух рынков.

а) Запишем функцию прибыли фирмы «Вершина» и промаксимизируем ее:

$$\Pi = Q_d(200 - Q_d) + 160Q_w - (Q_d + Q_w)^2 \rightarrow \max_{Q_d, Q_w \geq 0}$$

$$\begin{cases} \Pi'_{Q_d} = 200 - 2Q_d - 2Q_d - 2Q_w = 200 - 4Q_d - 2Q_w = 0 \\ \Pi'_{Q_w} = 160 - 2Q_d - 2Q_w = 0 \end{cases}$$

$$Q_d = 20, Q_w = 60$$

б) Аналогично пункту а) решим пункт б).

$$1. \Pi = Q_d(200 - t - Q_d) + 160Q_w - (Q_d + Q_w)^2 \rightarrow \max_{Q_d, Q_w \geq 0}$$

$$\begin{cases} \Pi'_{Q_d} = 200 - t - 2Q_d - 2Q_d - 2Q_w = 200 - t - 4Q_d - 2Q_w = 0 \\ \Pi'_{Q_w} = 160 - 2Q_d - 2Q_w = 0 \end{cases}$$

$$Q_w = 80 - Q_d, Q_d = \frac{40 - t}{2}$$

Запишем и промаксимизируем налоговые сборы:

$$T = 20t - 0,5t^2 \rightarrow \max_{t \geq 0}$$

Это парабола ветвями вниз, поэтому максимум функции – в вершине:  
 $t = 20 \Rightarrow T_{max} = 400 - 200 = 200$

$$2. \Pi = Q_d(200 - Q_d) + (160 - t)Q_w - (Q_d + Q_w)^2 \rightarrow \max_{Q_d, Q_w \geq 0}$$

$$\begin{cases} \Pi'_{Q_d} = 200 - 2Q_d - 2Q_d - 2Q_w = 200 - 4Q_d - 2Q_w = 0 \\ \Pi'_{Q_w} = 160 - t - 2Q_d - 2Q_w = 0 \end{cases}$$

$$Q_d = 50 - 0,5Q_w, \quad Q_w = 60 - t$$

Максимизируем налоговые сборы:

$$T = 60t - t^2 \rightarrow \max_{t \geq 0}$$

Это парабола ветвями вниз, поэтому максимум функции – в вершине:

$$t = 30 \Rightarrow T_{max} = 1800 - 900 = 900$$

$$3. \Pi = Q_d(200 - t - Q_d) + (160 - t)Q_w - (Q_d + Q_w)^2 \rightarrow \max_{Q_d, Q_w \geq 0}$$

$$\begin{cases} \Pi'_{Q_d} = 200 - t - 2Q_d - 2Q_d - 2Q_w = 200 - 4Q_d - 2Q_w = 0 \\ \Pi'_{Q_w} = 160 - t - 2Q_d - 2Q_w = 0 \end{cases}$$

$$Q_d = 20, \quad Q_w = \frac{120 - t}{2}$$

Максимизируем налоговые сборы:

$$T = 20t + 60t - 0,5t^2 \rightarrow \max_{t \geq 0}$$

Это парабола ветвями вниз, поэтому максимум функции – в вершине:

$$t = 80 \Rightarrow T_{max} = 1600 + 4800 - 3200 = 3200$$

- в) В пунктах а) и б) суммарные налоговые сборы составили 1100, в пункте в) же – 3200. При введении налога на одном рынке у фирмы-монополиста есть возможность переключиться на другой рынок, поэтому государство не может получать максимально возможные налоговые сборы, как если бы, например, у фирмы просто не было доступа ко второму рынку в принципе. Когда налог вводится сразу на двух рынках, где фирма осуществляет свою деятельность, у фирмы нет той свободы в перераспределении продаж между рынками, поэтому налоговые сборы получаются выше.

**Задача 4. Просто страна А****(30 баллов)**

В закрытой экономике страны А предельная склонность к потреблению равна 0.6, а инвестиции и государственные закупки постоянны и равны 100 и 200, соответственно. Единственный доход государства – это аккордный налог, которым оно облагает потребителей, при этом государственный бюджет сбалансирован. Автономное потребление и трансферты в данной экономике равны нулю.

а) (5 баллов) Найдите ВВП страны А.

б) (10 баллов) Если известно, что потенциальный ВВП равен 500, коэффициент Оукена равен 2, а естественный уровень безработицы равен 5%, то чему равен фактический уровень безработицы?

в) (15 баллов) Правительство решает изменить государственные закупки, не поднимая налоги, чтобы уменьшить уровень циклической безработицы. При этом, оно не хочет разгонять инфляцию в стране, так что оно минимизирует сумму квадратов циклической безработицы и инфляции. Поскольку правительство все еще хочет иметь сбалансированный бюджет, оно занимает деньги у ЦБ (то есть ЦБ изменяет денежную базу). Известно, что банки страны А не держат избыточных резервов, жители не пользуются наличными деньгами, а совокупный спрос задаётся уравнением количественной теории денег. Если ставка обязательных резервов равна  $rr$ , скорость обращения денег равна 1, а денежная база была изначально равна 180, то чему будут равны инфляция и уровень фактической безработицы после изменений? Чему будет равен дефицит государственного бюджета после проведения политики правительства? Проинтерпретируйте полученные результаты.

**Решение**

а) Известно, что потребители облагаются аккордным налогом  $T$ , значит располагаемый доход составляет  $Y - T$ , а тогда потребление  $C = mpc(Y - T)$ , т.к. автономное потребление и трансферты равны нулю.

Также нам дано, что государственный бюджет сбалансирован, а значит в отсутствие трансфертов  $G = T = 200$ .

Теперь воспользуемся формулой ВВП по расходам:

$$Y = C + G + I = mpc(Y - T) + G + I$$

$$Y = \frac{-mpc \cdot T + G + I}{1 - mpc} = \frac{-0,6 \cdot 200 + 200 + 100}{0,4} = 450$$

б) Воспользуемся формулой Оукена:

$$\frac{Y - Y^*}{Y^*} = -\beta(u - u^*),$$

где  $Y$  – фактический ВВП,  $Y^*$  – потенциальный ВВП,  $\beta$  – коэффициент Оукена,  $u$  – фактическая безработица и  $u^*$  – естественная безработица.

Подставим в формулу имеющиеся у нас значения:

$$\frac{450 - 500}{500} = -2(u - 0,05)$$

$$u = 0,1$$

в) В соответствие с формулой Оукена, для того, чтобы снизить уровень циклической безработицы, необходимо увеличить фактический ВВП. Поскольку инвестиции постоянны,

а правительство решает не изменять налоги, то ВВП может увеличиться только за счет увеличения государственных закупок. Выдавая кредит правительству, Центральный банк увеличивает денежную базу ровно на величину кредита.

Банки страны А не держат избыточных резервов, а значит норма избыточных резервов ( $er$ ) равна 0. Жители не пользуются наличными деньгами, что означает, что норма депонирования ( $cr$ ) также равна 0.

Таким образом,  $G_1 = 200 + K$ ,  $H_1 = 180 + K$ .

Для начала найдем уровень цен до проведения политики правительства. Используем для этого денежный мультипликатор, который равен  $mm = \frac{1 + cr}{rr + er + cr} = \frac{1}{rr}$ .

Кроме того,  $mm = \frac{M}{H} \Rightarrow M_0 = \frac{180}{rr}$ .

Известно, что совокупный спрос задается уравнением количественной теории денег, поэтому  $Mv = PY$ , а с учетом того, что скорость обращения денег равна 1, имеем  $P = \frac{M}{Y}$ .

Можем найти уровень цен до проведения политики правительства:

$$P_0 = \frac{180}{450rr} = \frac{0,4}{rr}$$

Теперь найдем ВВП после проведения политики правительства. Воспользуемся формулой из пункта а):

$$Y_1 = \frac{-mpc \cdot T + G_1 + I}{1 - mpc} = \frac{-0,6 \cdot 200 + 200 + K + 100}{0,4} = \frac{180 + K}{0,4}$$

Найдем новую денежную массу с помощью денежного мультипликатора:

$$mm = \frac{M_1}{H_1} = \frac{1}{rr} \Rightarrow M_1 = \frac{180 + K}{rr}$$

Вернемся к уравнению количественной теории денег и найдем новый уровень цен:

$$P_1 = \frac{M_1}{Y_1} = \frac{(180 + K) \cdot 0,4}{rr(180 + K)} = \frac{0,4}{rr}$$

Видно, что  $P_1 = P_0$ , а значит инфляция равна 0.

Поскольку правительство минимизирует сумму квадратов уровня циклической безработицы и инфляции, а инфляция равна 0, имеем  $u_c^2 \rightarrow \min$ , откуда получаем, что оптимальный уровень циклической безработицы равен 0. Тогда уровень фактической безработицы просто равен уровню естественной безработицы  $u = u^* = 0,05$ .

В соответствие с законом Оукена, если циклическая безработица равна 0, то фактический ВВП равен потенциальному, а значит  $Y_1 = Y^* = 500$ .

Теперь можем найти дефицит государственного бюджета.

$$Y_1 = \frac{180 + K}{0,4} = 500 \Rightarrow K = 20 \Rightarrow G - T = 20$$

Получили, что в данной экономике правительство может стимулировать выпуск без увеличения уровня цен, т.е. без инфляции. Это означает, что правительство проводит стимулирующую фискальную политику так, чтобы выпуск стал равен потенциальному.