Начнем с того, что выведем функцию предложения. Прибыль одной фирмы имеет вид

$\pi = P \cdot 2\sqrt{L} - wL = Py - w(y/2)^2$

Относительно y это парабола с ветвями вниз, вершина которой $y^* = 2P/w$. Следовательно выпуск всех фирм, то есть совокупное предложение, имеет вид $Y = 200P/w$.

Решим теперь задачу центрального банка. Конечно, по условию задачи центральный банк напрямую воздействует на денежную массу, однако выбирая денежную массу он может определять уровень цен, который сложится в экономике. В условии задачи нас спрашивают про цены, поэтому для удобства выразим счастье Джона Смита через P, а не через M.

$U = Y - 50\pi^2 = \frac{200P}{w} - 50(P-1)^2 = -50P^2 + 100(1+\frac{2}{w})P - 50$

Относительно P это парабола с ветвями вниз, вершина которой $P = \frac{w+2}{w}$.

Следовательно, выпуск будет равен $Y = \frac{200(w+2)}{w^2}$.

Понимая, как устроено решение центрального банка, профсоюз подберет номинальную заработную плату так, чтобы реальная в точности равнялась единице

$\frac{w}{P} = 1$, $\frac{w}{1+2/w} = 1$, $w = 2$

Отсюда нетрудно посчитать, что $P^* = 2$, $Y^* = 200$.

Важное отличие от предыдущего случая состоит в том, что теперь глава центрального

банка понимает, что какой бы уровень цен он ни выбрал, реальная заработная плата w/P в результате действий профсоюза обязательно будет равна 1, откуда $Y = 200$. Получается, что центробанк не влияет на реальный ВВП и должен заботиться только об инфляции, которую он может минимизировать, выбрав $P^* = 1$. Формально,

$U = Y - 50\pi^2 = \frac{200P}{w} - 50(P-1)^2 = 200 - 50(P-1)^2$.

Эта функция достигает максимума при $P^* = 1$, при этом $Y^* = 200$.

Примечание. В обоих пунктах можно выражать счастье Джона Смита не через уровень цен, а через величину денежной массы. Тогда решение будет более громоздким, но результат получится такой же. Попутно вы найдете, что в пункте 1 $M^* = 400$, а в пункте 2 $M^* = 200$.

Уровень выпуска в обоих случаях одинаковый, а инфляция во втором случае равна нулю (в то время, как в первом случае она больше нуля). Поэтому уровень счастья Джона Смита во втором случае выше.

Эта задача иллюстрирует преимущества ситуации, когда центральный банк проводит политику по заранее определенным правилам (будь то таргетирование денежной массы или таргетирование инфляции, или еще какое-то правило монетарной политики).

При отсутствии ограничений у центрального банка, он всегда имеет стимул напечатать побольше денег, чтобы попробовать увеличить выпуск. Остальные экономические агенты понимают это, и ожидают высокой инфляции. Которая в результате и возникает.

Если же свобода действий ЦБ ограничена правилами, то, как мы видим из решения задачи, при том же самом уровне выпуска удается обеспечить более низкую инфляцию.

Примечание. Почему бы в пункте 1 профсоюзу не вести себя так же, как в пункте 2, и не установить $w = 1$? Ведь профсоюзу вроде бы всё равно, а центральному банку будет лучше?

Если профсоюз выберет такую зарплату в пункте 1, то функция счастья центрального банка примет вид

$U = Y - 50\pi^2 = 200P - 50(P-1)^2 = -50P^2 + 300P - 50$

В этом случае ЦБ, конечно, выберет $P = 3$, а значит, реальная зарплата окажется равна 1/3 и цель профсоюза не будет достигнута. Заметим, что в этом случае в экономике будет наблюдаться высокая инфляция, однако и выпуск будет больше, чем 200.

Третий этап игры между властями двух уровней и фирмой во всех пунктах устроен одинаково: узнав ставки f и r, фирма выбирает оптимальный объем выпуска, максимизируя прибыль.

Поскольку требуемое количество труда для производства Q единиц составляет $L = 2Q$, общая сумма налогов, уплачиваемых фирмой, составит $T = T_f + T_r = fQ + r \cdot 2Q$. Запишем функцию прибыли:

$$\pi(Q) = (140 - 2Q)Q - 20Q - fQ - r \cdot 2Q = (120 - 2Q - f - 2r)Q$$

Это парабола с ветвями вниз, максимум которой находится в вершине

$$Q^* = 30 - \frac{f}{4} - \frac{r}{2}$$

Выпишем налоговые поступления в бюджет каждого уровня:

$$T_f = fQ^* = f(30 - \tfrac{f}{4} - \tfrac{r}{2}) \qquad (8.1)$$
$$T_r = r \cdot 2Q^* = r(60 - \tfrac{f}{2} - r) \qquad (8.2)$$

1. В этом пункте региональные власти будут принимать решение о r, зная, какая выбрана f, а также зная, как на обе ставки отреагирует фирма. Поскольку f воспринимается ими как заданная величина, можно найти оптимальный ответ — ставку r. Максимизируя параболу с ветвями вниз из (8.2), получаем $r = 30 - \frac{f}{4}$. Предвидя это решение, федеральные власти будут максимизировать

$$T_f = f\left(30 - \frac{f}{4} - \frac{30 - f/4}{2}\right) = f\left(\frac{30 - f/4}{2}\right)$$

Это также квадратичная парабола с ветвями вниз и вершиной в точке $f^* = 60$ (легко посчитать её, например, как среднее арифметическое между нулями функции и сославшись на симметричность параболы относительно вершины), откуда легко посчитать $r^* = 15$.

2. В этом пункте федеральные власти будут принимать решение о f, зная, какая выбрана r, а также зная, как на обе ставки отреагирует фирма. Поскольку r воспринимается ими как заданная величина, можно найти оптимальный ответ — ставку f. Максимизируя параболу с ветвями вниз из (8.1), получаем $f = 60 - r$. Предвидя это решение, региональные власти будут максимизировать

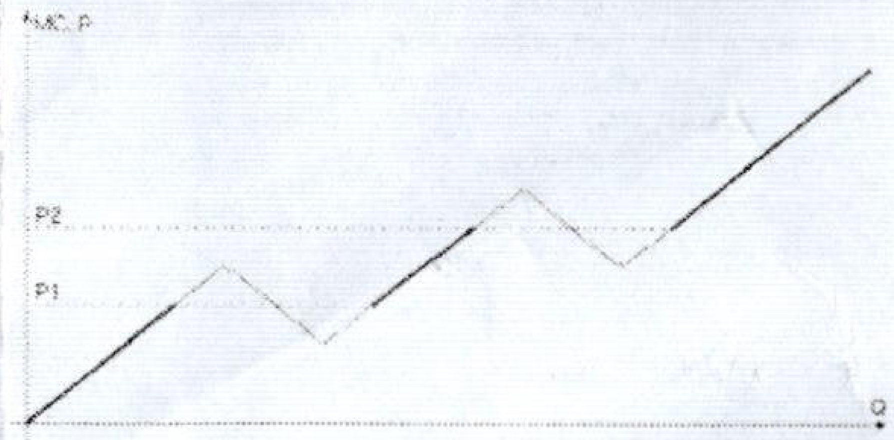
$$T_r = r\left(60 - \frac{60 - r}{2} - r\right) = r\left(\frac{60 - r}{2}\right)$$

Это также квадратичная парабола с ветвями вниз и вершиной в точке $r^* = 30$, откуда легко посчитать $f^* = 30$.

3. Суммарные налоговые сборы равны

$$T = T_f + T_r = f\left(30 - \frac{f}{4} - \frac{r}{2}\right) + r\left(60 - \frac{f}{2} - r\right) = (f + 2r)\left(30 - \frac{f + 2r}{4}\right)$$

По виду функции можно понять, что суммарные налоговые поступления зависят от величины $t = f + 2r$, и если выбрана эта сумма, то с точки зрения общих доходов бюджетов не важно, какие именно f и r выбраны. Поэтому $T = t(30 - \frac{t}{4})$. Это квадратичная парабола с ветвями вниз и вершиной в точке $t = 60$. Таким образом, для максимизации общих налоговых сборов нужно выбрать любые f^* и r^* такие, что $f^* + 2r^* = 60$.



Если уравнение $MC(Q) = P$ имеет один корень, кривая предложения совпадает с кривой MC.

Если корней несколько, то нужно выбрать тот выпуск, при котором прибыль будет больше. Во-первых, заметим, что мы никогда не выберем точку на убывающем участке MC, так как это точка локального минимума функции прибыли. Значит, мы всегда будем выбирать только корень уравнения $MC(Q) = P$, лежащий на возрастающем участке графика MC.

На следующем этапе для определения оптимального выпуска необходимо сравнить величины прибыли, которую фирма получит, выбирая больший или меньший объем выпуска, соответствующие возрастающим участкам графика MC. Для этого удобно использовать площади треугольников, заключенных между графиками P (для каждого P) и MC. Площадь «верхнего» треугольника при каком-то P равна дополнительным убыткам перехода от меньшего выпуска к большему, а «нижнего» - дополнительным выгодам. Тогда если больше площадь «нижнего» - то есть дополнительные выгоды больше дополнительных убытков – то кривой предложения будет принадлежать больший выпуск. Если же больше площадь «верхнего» треугольника – то есть дополнительные убытки больше дополнительных выгод – то выгоднее будет производить меньший объем выпуска.

Если площади указанных треугольников равны (как при ценах P_1 и P_2) – возникает точка разрыва функции предложения, фирме безразлично, какой из двух объемов выбрать (при этом обе интересующие нас точки включаются в график кривой предложения).

Поскольку указанные треугольники подобны, P_1 лежит ровно посередине между соответствующими локальным максимумом и минимумом MC. Аналогично для P_2.

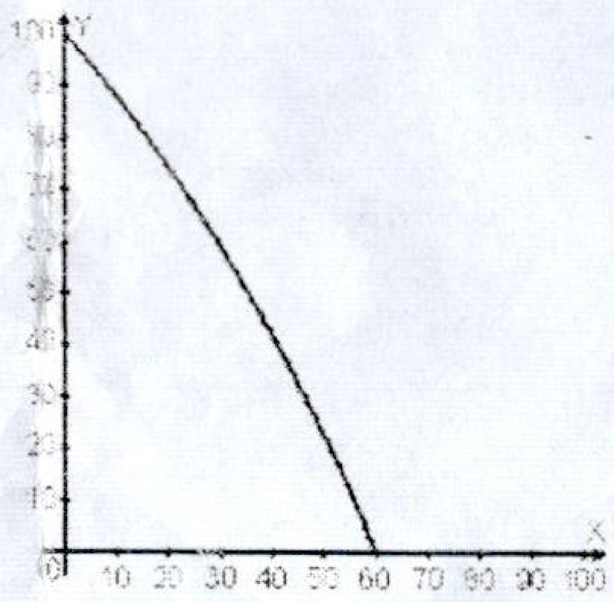
Ответ:
см. рис.

Для производства X единиц Военной и Y единиц Мирной продукции нужно $A = 4X + Y$ единиц Железа, $B = 3X + 2Y$ единиц Дерева, $C = 2Y$ единиц Глины. Подставляя эти выражения в КПВ ресурсов, получаем

$(4X + Y)^2 + (3X + 2Y)^2 + (2Y)^2 = 90000$ или $25X^2 + 20XY + 9Y^2 = 90000$.

Это и есть искомое уравнение КПВ. Решив это уравнение относительно Y, можно получить явную зависимость Y(X): $Y = \frac{\sqrt{810000 - 125X^2} - 10X}{9}$ (хотя делать это, в принципе, не обязательно).

КПВ будет иметь обычный вогнутый вид, max(X) = 60, max(Y) = 100.



Ответ: Уравнение кривой, описывающей возможности города в производстве военной и мирной продукции: $Y = \frac{\sqrt{810000 - 125X^2} - 10X}{9}$. Максимально возможный объем производства военных товаров равен 60, мирных товаров – 100.