

## Математика оптимизации и микроэкономика. Занятие 2.

### Условная оптимизация или оптимизация при условии ограничения

В экономических задачах часто требуется найти максимум/минимум целевой функции ( $f(x, y)$ ) при каком-то условном ограничении ( $g(x, y) = 0$ ).

$$\begin{cases} f(x, y) \rightarrow \max_{x, y} \\ g(x, y) = 0 \\ x, y \geq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} f(x, y) \rightarrow \min_{x, y} \\ g(x, y) = 0 \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим на примере задачи.

*Пример 1.* Максимизирующая прибыль фирма выпускает два продукта  $x$  — консервы с говядиной и  $y$  — консервы с горбушой. Фирма получила заказ от государства на производство:  $x + y = 12$  единиц продукции. Функция прибыли имеет следующий вид:  $\pi(x, y) = 80x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 100y$ .

**Решение.** Выразим  $y$  через  $x$  и подставим в исходную функцию прибыли:

$$\begin{cases} y(x) = 12 - x \\ \pi(x, y(x)) = 80x - 2x^2 - x(12 - x) - 3(12 - x)^2 - 100(12 - x) \rightarrow \max_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^* = 5 \\ y^* = 7 \end{cases} \Rightarrow \pi^* = 868.$$

**Товарным набором** называется пара  $(x; y)$ , где  $x$  — количество первого товара,  $y$  — количество второго товара.

**Бюджетным ограничением** называется множество всех тех товарных наборов, на каждый из которых потребитель потратил бы весь свой доход. **Бюджетным множеством** называется множество всех тех товарных наборов, которые доступны индивиду.

**Кривая безразличия** — множество всех товарных наборов, которые приносят потребителю одинаковый уровень полезности.

*Пример 2.* Функция полезности потребителя имеет вид  $u(x; y) = xy$ . Тогда  $xy = C$  — кривая безразличия,  $C > 0$ .

**Идея выявленных предпочтений** — Если индивид выбирает набор  $(x_1; y_1)$ , когда доступен набор  $(x_2; y_2)$ , то во-первых,  $(x_1; y_1)$  для индивида *строго лучше*, чем  $(x_2; y_2)$ , а во-вторых, невозможна такая ситуация, где индивиду доступен набор  $(x_1; y_1)$ , но он выбрал набор  $(x_2; y_2)$ .

**Ценовая дискриминация** — Явление, при котором цена на товар может различаться в зависимости от покупаемой единицы товара или от потребителя, которому этот товар продается. Она бывает трех типов:

- Первый тип — цена различается для разных единиц товара и для разных потребителей
- Второй тип — цена различается для разных единиц товара, но одинакова для всех потребителей
- Третий тип — цена не различается для разных единиц товара, но различается для разных потребителей

*Пример 3.* Допустим, что потребительский доход равен 100, цена товара  $x$  - 10, цена товара  $y$  - тоже 10. В таком случае, *бюджетным множеством* будет совокупность всех тех наборов, для которых выполнено  $10x + 10y \leq 100$ , *бюджетным ограничением* же будет совокупность всех тех наборов, для которых  $10x + 10y = 100$

**Задача 1.** Дани идет в магазин одежды с суммой в 6000 рублей для того, чтобы купить брюк и рубашек на следующие полгода. Обозначим брюки за  $x$ , а рубашки — за  $y$ . Предпочтения Дани описываются следующей функцией полезности:  $U(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ . Одна рубашка стоит 500 рублей, брюки — 1000 рублей. Сколько брюк и сколько рубашек купить Дани?

**Задача 2.** Функция полезности Васи описывается следующим образом:  $U(x, y) = x^a y^a$ , где  $x$  — это количество съеденных конфет, а  $y$  — количество съеденных пончиков. Известно, что цены на товары неизменны и равны  $P_x = 2, P_y = 4$ . Помогите Васе получить максимум удовольствия, если у него в кармане 8 руб. Решите задачу при условии, что:

- а)  $a = 1$ ;
- б)  $a = 2$ ;
- в)  $a = 100500$ .

Объясните полученный результат.

**Задача 3.** В магазине продается два блага —  $x$  и  $y$ . Цены первого и второго блага одинаковы и равны 10. Проводится акция: после покупки пяти единиц товара  $x$  все последующие единицы продается по цене 5, а не 10. Предпочтения типичного потребителя с доходом 100 задаются функцией полезности  $U(x, y) = x^2 + 2y^2$ . Изобразите бюджетное ограничение и найдите товарный набор, максимизирующий полезность типичного потребителя  
(Подсказка: решайте задачу графически!)

**Задача 4.** Потребитель с функцией полезности  $U(x, y) = x^2 + y^2$  и доходом  $I = 1000$  решает, какой товарный набор выбрать, чтобы получить максимум полезности.

Цены благ заданы:  $p_x = 1, p_y = 5$ . Однако, в целях ликвидации избыточного спроса, после покупки потребителем 200 единиц первого товара, все последующие единицы продаются по цене  $p_{x_{new}} = 16$ . Изобразите множество всех доступных для потребителя наборов, а также найдите оптимальный выбор (то есть тот товарный набор, при котором полезность максимальна).

**Задача 5.** Красивая студентка Оля учится на 1 курсе факультета экономики. Используя свою исключительную внешность, Оля может заставить мальчиков со своего факультета делать за нее домашние задания по всем предметам. Впрочем, ничто не мешает Оле также попросить о помощи также мальчиков с факультета математики. Пусть на экономфаке учится  $x$  мальчиков, а на матфаке —  $y$ . Оля может распределить работу между всеми мальчиками 3 способами, при этом она получит  $q_1, q_2, q_3$  готовых домашних заданий, причем

$$\begin{aligned} q_1 &= \min\{x, 2y\} \\ q_2 &= \min\{2x, y\} \\ q_3 &= \min\left\{\frac{3}{2}x, \frac{3}{2}y\right\} \end{aligned}$$

Помогите Оле решить, каким способом распределить домашние задания между мальчиками так, чтобы готовых домашних заданий получилось как можно больше.

Предположим теперь, что Оля может распределить мальчиков на три группы и в каждой группе использовать первый, второй или третий способ распределения домашних заданий соответственно. Найдите оптимальный вариант распределения домашних заданий в этом случае.

† **Задача 6.**<sup>1</sup> Джон ужасный любитель пива с рыбой, поэтому его функция полезности имеет следующий странный вид  $U(a, b) = \min\{a; b\}$ , где  $a$  — это количество, съеденной рыбы в кг,  $b$  — количество выпитого пива в литрах. Цена на 1 кг рыбы установилась на уровне 10\$, а на 1 литр пива — 4\$. В кармане у Джона 42\$. Джон зарабатывает 1000\$, из них 200\$ уходит на бензин, 500\$ — на содержание квартиры, 150\$ — на питание, а остальные деньги распределяются между им и его женой. Известно, что Джон очень сильно любит свою жену, поэтому она может забрать  $x$  долларов из оставшихся денег.

а) Помогите Джону максимизировать свою полезность, если жена забрала  $x = 58$ \$. Изобразите кривые безразличия.

б) Допустим, что после первой удачной попытки получить максимум удовольствия, у Джона сильно разболелся живот. Врачи запретили ему потреблять так много рыбы и пива, поэтому они поставили следующее ограничение:  $a^2 + b^2 \leq 5$ . Сколько теперь Джон съест рыбы и выпьет пива? (Предполагается, что Джон максимизирует полезность)

в) Наевшись в очередной раз, у Джона все равно болел живот. На этот раз его здоровьем занялась его жена — Вероника. Вероника вычитала интересную статью в журнале *GoodHousekeeping*<sup>®</sup>, в которой говорилось, что мужчинам нельзя потреблять больше 2 литров пива. Какую сумму денег должна забрать жена, чтобы Джон получил максимум удовольствия, но при этом у него не было проблем со здоровьем?

г) Докажите, что  $\min\{a; b\} = \frac{a + b - |a - b|}{2}$  используйте это в следующем пункте;

д) На этот раз все стало еще сложнее для нашего бедного Джона. Оказывается он узнал, что жена не одобряет его злоупотребление спиртными напитками, и ее функция полезности имеет следующий вид:  $U_{\text{жены}} = \frac{x}{40} - \frac{b}{4}$ . Как было сказано выше Джон очень сильно любит жену, но он также любит себя. Поэтому он старается сделать так, чтобы в общем всем было лучше. Какое количество рыбы и пива он будет потреблять, если теперь он сам решает, сколько дать денег жене?

е) Покажите графическое решение к каждому пункту.

**Задача 7.**<sup>2</sup> Г-жа А рассматривает альтернативы проведения субботнего вечера. Она может пойти в ресторан «Ocean View». Такое времяпрепровождение она оценивает в 49 д.е. Кроме того, г-жа А может пойти в ресторан «Renaissance». Если в «Renaissance» будет выступать «Flabrum eugі», то такой вечер оценивается г-жой А в 100 д.е. Если же концерта не будет, то оценка такого вечера 16 д.е. Обычно по субботам в ресторане «Renaissance» действительно выступает «Flabrum eugі», и вероятность такого события г-жа А оценивает в 0,75. Она может позвонить в справочную службу ресторана, чтобы узнать, будет концерт или нет. За неуплату у А отключили стационарный телефон. Поэтому она может сделать звонок только с мобильного телефона. В соответствии с ее тарифом для нее звонок платный. Предпочтения А описываются функцией ожидаемой полезности с элементарной функцией полезности  $u(x) = \sqrt{x}$  Какова максимальная цена за звонок, которую согласится заплатить А?

**Задача 8.**<sup>3</sup> Пол Самуэльсон имеет 100 долларов и сталкивается с непростой задачей — пойти в магазин и купить хлеба с маслом. Предпочтения Пола представимы функцией полезности  $u(x, y) = xy$ , цена хлеба — 1 доллар, цена масла — 1 доллар.

<sup>1</sup>Автор задачи Евдокимов Сергей

<sup>2</sup>Курс микроэкономики на ФЭ НИУ ВШЭ

<sup>3</sup>Автор задачи Даниил Лабазанов

- а) Найдите оптимальный выбор Пола и изобразите его на графике в координатах «Хлеб-Масло»;
- б) предположим, что теперь хлеб облагается потоварным налогом в размере 1 доллар за буханку. Найдите выбор Пола в этом случае и изобразите его на аналогичном графике;
- в) предположим, что для Пола планируется заменить потоварный налог на хлеб аккордным таким образом, чтобы доходы от потоварного налога в прежней точке выбора совпадали с доходами от аккордного налога. Как изменится оптимальный выбор Пола и его благосостояние? Проинтерпретируйте полученный результат интуитивно;
- г) можно ли сказать что-то о благосостоянии Пола, если его функция полезности неизвестна, но известен тот набор, который он выбрал при потоварном налоге?

**Задача 9.** Иван работает клерком в офисе, и получает свое жалование в конце каждой недели. С каждого жалования он откладывает 300 денежных единиц для того, чтобы купить себе еды на следующую неделю: сарделек и головок сыра. В конце первой недели Иван получил жалование, и пошел в магазин, увидев там следующие цены: 30 д.е за сардельку и 30 у.е за головку сыра. Известно, что он точно купил три головки (Иван — сыроед, такие количества его не смущают), и съел все купленное за неделю, получив следующее жалование. После, в конце второй недели, он опять пошел в магазин, и цены повергли его в шок: теперь сарделька стоила 15 д.е, а головка сыра — аж 60 д.е! Новая потребительская корзина Ивана включала в себя, помимо прочего, всего одну головку. Так он и прожил третью неделю, съев все подчистую и получив новое жалование. И вновь, в конце третьей недели, магазин удивил его: головка сыра подорожала до 100 д.е, сосиски подешевели на 5 д.е. Теперь Иван положил в корзину только полголовки сыра. Как изменилось его благосостояние за прошедшее время? Приведите графическое решение, предполагая, что предпочтения Ивана стандартны.

**Задача 10<sup>4</sup>** Фермер Саша живет в Липецкой области, и все, нужное для семьи, выращивает сам на своих больших огородах. С одной лишь оговоркой: выращенные огурцы и помидоры он возит на местный овощной рынок. Перед каждой поездкой у него набирается 20 килограмм огурцов и 10 килограмм помидоров. Цены на рынке заданы и составляют 10 рублей за килограмм огурцов и 20 рублей за килограмм помидоров.

- а) Изобразите бюджетное ограничение Саши.
- б) Предположим, что Саша всегда продавал чуть-чуть помидоров, и докупал на вырученные деньги огурцы. Схематично изобразите его точку выбора.
- в) Внезапно, на Липецкий рынок вышли новые продавцы-фермеры из соседней Орловской области, в результате чего цена на огурцы упала до 5 рублей за килограмм. Как изменится бюджетное ограничение Саши?
- г) Как изменилось благосостояние Саши в результате изменений из пункта в)? Может ли он перестать продавать помидоры, начав докупать их с помощью продажи части своих огурцов? Прокомментируйте свой ответ с точки зрения интуиции.
- д) Предположим, что сначала Саша продавал не помидоры, а огурцы, и, тем не менее, изменения из пункта в) произошли. Можем ли мы сказать, какие овощи он будет продавать теперь?

† **Задача 11.** Совершено преступление. Единственной уликой, имеющейся у полиции, является чек, утерянный преступником. Согласно чеку в день преступления он купил 3 пачки хлопьев по 45 руб. за пачку и 6 пакетов молока по 15 руб. за пакет. У полиции имеется двое подозреваемых: А и В. В результате обыска были найдены их чеки за предыдущую неделю. Известно, что на прошлой неделе хлопья стоили 30 руб., а молоко — 20 руб.. Согласно найденным чекам господин

<sup>4</sup>Автор задачи Даниил Лабазанов

А купил 1 пачку хлопьев и 10 пакетов молока, а господин В - три пачки хлопьев и четыре пакета молока. Можно ли на основе данной информации заключить, кто не является преступником?

† **Задача 12**<sup>5</sup> Очень умный и талантливый студент Вася решил провести лето с пользой и принять участие в летней экономической школе в г. Остин, США. Вася просто обожает пить чай с конфетами. Его полезность от потребления  $x$  стаканов чая и  $y$  штук конфет задается функцией  $U = \ln x + y$ . Неудивительно, что Вася очень обрадовался, когда обнаружил, что он является единственным потребителем чая в Остине, ведь цена чая целиком и полностью теперь зависит от объема чая, который Вася захочет потребить. Функция же предложения чая в Остине выглядит следующим образом:  $x^s = p_x$ . С конфетами, к сожалению, оказалось не все так гладко. Выяснилось, что стоимость одной конфеты составляет  $p_y = 1\$$ , и Вася не в силах никак на нее повлиять. Всего же на конфеты и чай Вася планирует потратить не больше 2\$.

а) Сколько стаканов чая и сколько конфет купит Вася?

б) Сколько стаканов чая и сколько конфет купил бы Вася, если бы он действовал как совершенный конкурент (при этом оставаясь единственным потребителем чая)? Как изменились объемы, потребляемых им товаров?

в) Пусть правительство США не хочет, чтобы русские монополисты диктовали условия бедным американским продавцам чая, поэтому оно хочет заставить Васю покупать конкурентный объем чая. Правительство США не знает точно, какая функция полезности у Васи, и сколько денег он планирует потратить на чай и конфеты, однако разведчики ЦРУ выяснили, что она имеет вид  $U = v(x) + y$ , где  $v' > 0, v'' < 0$ . Тем не менее, государство знает кривую предложения чая ( $x^s = p_x$ ). Дайте количественный совет государству США. То есть скажите, какую конкретно меру необходимо ввести правительству США.

## Фирма с несколькими заводами.

**Задача 13**<sup>6</sup> Предположим, что продукция фирмы выпускается двумя заводами, совокупные издержки которых таковы:  $TC_1(q_1) = 0,5q_1^2$  и  $TC_2(q_2) = q_2^2$ ,  $q_1 + q_2 = Q$ , где  $Q$  — совокупный выпуск фирмы, а  $q_1$  и  $q_2$  — выпуски первого и второго заводов соответственно. Найдите функцию совокупных издержек фирмы  $TC_{\text{общ}}(Q)$  как минимальное значение  $TC_1(q_1) + TC_2(q_2)$  при  $q_1 + q_2 = Q$ .

**Задача 14**<sup>7</sup> Собственник фирмы владеет двумя заводами, на которых производится один и тот же товар. Общие издержки каждого завода заданы функциями:  $TC_1(q_1) = q_1^2 + 20$ ,  $TC_2(q_2) = 2q_2 + 10$ .

Выведите функцию общих издержек всей фирмы  $TC(Q)$ , полагая  $Q = q_1 + q_2$ .

**Задача 15**<sup>8</sup> Фирма А, производящая товар X в количестве  $Q$ , владеет двумя заводами. Функция издержек первого завода задается формулой  $TC_1(q_1) = 100 + 10q_1$ , второго —  $TC_2(q_2) = q_2^2$ ,  $q_1 + q_2 = Q$ .

а) Найдите  $TC(Q)$  — функцию издержек фирмы А.

б) Изменится ли ответ на вопрос пункта а, если на первом заводе 100 — это квазипостоянные издержки, то есть  $TC_1(0) = 0$ ?

**Задача 16.** Функция издержек фирмы описывается следующим образом:  $c(K, L) = w \cdot L + r \cdot K$ , при этом известны цены факторов производства:  $w = 2\$$ ,  $r = 1\$$ . Также известная технология

<sup>5</sup>Автор задачи Котова Надежда

<sup>6</sup>Олимпиада ВШЭ, 2008

<sup>7</sup>Всероссийская олимпиада, 2006

<sup>8</sup>Идея: Олимпиада ВШЭ, 2008

производства  $Q(K, L) = \sqrt{2L} + \sqrt{K}$ . Найдите оптимальное распределение факторов производства, при котором издержки будут наименьшие,  $L^*$ ,  $K^*$ , если фирме нужно произвести:

- а) 10 ед. продукции;
- б) 20 ед. продукции;
- в)  $q$  ед. продукции.

**Задача 17<sup>9</sup>** В 2007 году произошло слияние двух компаний ABC и XYZ. Совокупные издержки производства товара согласно технологии фирмы ABC имеют вид  $TC^{ABC}(Q) = 100 + 10Q$  (кроме того,  $TC^{ABC}(0) = 0$ ), где  $Q$  — выпуск продукции. Компания XYZ имеет другую технологию производства того же самого товара, согласно которой совокупные издержки производства имеют вид  $TC^{XYZ}(Q) = Q^2$ , где  $Q$  — выпуск продукции. В результате у объединенной компании имеются в распоряжении обе технологии производства и она может распределять производимую продукцию в любой пропорции между этими технологиями.

Найдите минимальные издержки производства 12 единиц готовой продукции для объединенной компании.

**Задача 18.** Фирма владеет двумя заводами; для каждого из них дана функция издержек производства на нём:

$$TC_1(Q) = \begin{cases} 0, & \text{если } Q = 0; \\ \frac{27}{Q^2} + \frac{2Q}{1 + Q^2}, & \text{если } Q > 0; \end{cases}$$

и  $TC_2(Q) = Q + \frac{Q}{2 + Q}$ . Когда фирма хочет произвести  $Q$  единиц продукции, она распределяет производство между двумя заводами так, чтобы минимизировать суммарные издержки. Найдите  $TC(Q)$ .

## Дискриминация.

**Задача 19<sup>10</sup>** Монополист разработал и успешно реализовал план продажи ограниченной партии нового товара. Сначала он провел масштабную рекламную кампанию, изучил спрос на товар и вывел функцию спроса, которая по его оценкам имела вид  $Q = 220 - 2P$ , где  $Q$  — количество товара в условных единицах, а  $P$  — цена условной единицы товара, в денежных единицах. Он также убедился в том, что спрос на товар устойчив и не изменится в течение месяца.

Потом монополист объявил, что продавать товар он будет по фиксированной цене и только один месяц. Однако после того как в течение 15 дней все, кто готов был купить товар по названной цене, приобрели его, он объявил о новой сниженной цене и так распродал все остатки товара.

Определите, по каким ценам продавал и какую прибыль в итоге получил хитрый монополист, если известно, что его затраты на рекламу составили 80, а на производство продукта  $Q^2$  ден. ед. Можно ли охарактеризовать его поведение как ценовую дискриминацию?

**Задача 20<sup>11</sup>** Предположим, что монополия может использовать ценовую дискриминацию на двух рынках: на рынке 1, кривая спроса на котором задана функцией  $q_1 = 2 - p_1$ , и на рынке 2 с кривой спроса  $q_2 = 4 - p_2$ . Предположи, что как только товар продан, он уже не может быть перепродан на другом рынке. То есть арбитраж невозможен — например, из-за частых и

<sup>9</sup>Многопрофильная олимпиада, 2008

<sup>10</sup>«Сибиряда. Шаг в мечту», 2010. Людмила Веселая

<sup>11</sup>Oz Shy, "Industrial Organization".

строгих проверок на границе между рынками. Пусть монополия производит единицу товара с постоянными издержками  $c = 1$ .

а) Найдите равновесие. Проиллюстрируйте равновесие графически. Найдите прибыль монополиста.

б) Предположим, что оба наших рынка стали открытыми и все покупатели могут теперь свободно торговать и перемещать товары (издержки перемещения равны нулю) между рынками. Найдите равновесие в этом случае. Проиллюстрируйте равновесие графически. Найдите прибыль монополиста и сравните ее с прибылью, полученной в пункте а. Поясните полученный результат.

**Задача 21.**<sup>12</sup> Дискриминирующая монополия продает свой товар в городах  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ , между которыми нет пассажирского сообщения. Кривая спроса в городе  $\mathcal{A}$  задается формулой  $p_{\mathcal{A}} = 100 - q_{\mathcal{A}}/2$ . Кривая спроса в городе  $\mathcal{B}$  задается формулой  $p_{\mathcal{B}} = 100 - q_{\mathcal{B}}$ . Обозначим агрегированный объем производства монополии как  $Q$ , то есть  $Q = q_{\mathcal{A}} + q_{\mathcal{B}}$ . Весь объем товара производится на одном заводе. Функция издержек монополии зависит от общего объема производства:  $TC(Q) = Q^2$ .

а) Найдите равновесие и прибыль монополиста.

б) Представим, что контроль над монополией получил новый СЕО, который решил разделить ее завод на два завода, один из которых будет производить продукцию для продажи только на первом рынке, а второй только на втором рынке. Известно, что функция издержек на каждом заводе будет иметь тот же вид, что и прежде. Найдите равновесие и прибыль монополиста.

в) Представим теперь, что у монополии снова один завод, но теперь между городами появился транспорт, который может без всяких издержек перевозить жителей из  $\mathcal{A}$  в  $\mathcal{B}$  и обратно. Найдите равновесие в этом случае.

† **Задача 22.**<sup>13</sup> Фирма «Машино счастье» является монополистом на рынке пирожков с малиной. Спрос на ее продукцию предъявляют 2 группы потребителей: бурые медведи и белые медведи. Спрос белых мишек на пирожки задается функцией  $Q_w = 160 - P_w$ , а спрос бурых мишек задается функцией  $Q_b = 150 - P$ . Издержки фирмы на производство пирожков задаются функцией  $TC = 4(Q_w + Q_b)$ .

а) Если фирма не может осуществлять ценовую дискриминацию (то есть она должна установить единую цену на свою продукцию для обеих групп потребителей), какую цену она установит на пирожки? Какую прибыль она получит?

б) Пусть теперь фирма может устанавливать разные цены для бурых медведей и для белых, какие цены она установит? Какую прибыль она получит?

в) Предположим теперь, что «Машино счастье» может не только устанавливать разные цены для разных групп потребителей, но и устанавливать на каждый из пирожков свою цену. Сколько пирожков продаст фирма, а так же какую прибыль она получит?

г) Пусть на рынке пирожков с малиной появляется еще одна фирма «Бабушкина любовь», издержки которой на производство пирожков задаются той же функцией, что и издержки «Машино счастья». Известно, что как белые, так и бурые мишки одинаково ценят пирожки и «Машино счастья», и «Бабушкиной любви», и всегда покупают те пирожки, которые дешевле. Какая цена установится на рынке пирожков с малиной? Какую прибыль получают фирмы?

д) Как поменяется Ваш ответ на предыдущий пункт, если издержки «Бабушкиной любви» на приготовление пирожков с малиной понизятся и станут  $TC = 3(Q_w + Q_b)$ .

<sup>12</sup>Oz Shy, "Industrial Organization".

<sup>13</sup>Автор задачи Котова Надежда

е) Пусть «Машино счастье» и «Бабушкина любовь» решили объединиться и договориться о цене на свою продукцию. Какую цену они установят? Какую прибыль получают?

### Ожидаемая величина

Наиболее часто используемые величины для расчета риска, случайных выигрышей представляют собой математическое ожидание случайной величины (expected value).

**Определение 1.** Математическое ожидание случайной величины — это взвешенная сумма значений случайной величины с весами, равными вероятностям того, что случайная величина принимает определенные значения Обозначение:

$$E(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i,$$

где  $x_i$  — это величина исхода,  $p_i$  — веса, где  $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = \sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

**Примечание 6.** Когда вероятности исходов каждого события равны между собой, верно следующее равенство  $E(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ .

*Пример 4.* Предположим, что глава фирмы "Trust me" считает, что с вероятностью  $p_1 = 0.4$  возможен спад торговли в следующем квартале, и с вероятностью  $p_2 = 0.6$  его не будет. Совет акционеров считает, что в случае спада прибыль компании составит  $\pi_1 = 100\$$ , иначе  $\pi_2 = 1000\$$ . Подсчитайте ожидаемую прибыль.

$$\text{Решение. } E(\pi) = \sum_{i=1}^2 \pi_i p_i = \pi_1 p_1 + \pi_2 p_2 = 640\$.$$

† **Задача 23.**<sup>14</sup> Каждое утро студентка Надя, также как и студент Сергей ездят на электричке. Надя имеет следующую функцию полезности:  $u_N(I) = \sqrt{I}$ , а Сергей:  $u_S(I) = I$ . Каждый утро, студент решает непростую задачу: проехать зайцем или заплатить за проезд. Однако каждый студент, знает, что существует вероятность быть пойманным у Нади  $1/4$ , у Сергея -  $1/5$ , стоимость билета составляет 39 рублей. Ежедневные доходы Нади и Сергея одинаковы и равны 400 рублей. Предполагается, что Надя и Сергей рациональны и максимизируют ожидаемую полезность.

а) Какое максимальное количество денег  $p_{ticket}$  Надя готова заплатить за один проезд?

б) Если цена одного проезда составит 9,5 рублей, будет ли Сергей ездить зайцем или будет платить? Будет ли Надя платить за проезд?

в) Пусть у Нади сегодня день отчаянной домохозяйки, поэтому она решила, что сегодня она точно не будет платить за проезд. Однако, Надя не очень сильно любит риск, поэтому она решила застраховаться у местного авторитета Пети. Петя предлагает следующие условия страховки: за каждый рубль отданный Пете Надя получает обратно 3 рубля в случае наступления страхового случая (то есть в случае, если ее все-таки поймают контроллер). На какую сумму Надя купит у Пети страховку? А если за каждый рубль отданный Пете Надя получает обратно 2 рубля? А если 4?

г) Почему у Нади больше вероятность быть пойманной? Дискриминация или естественный отбор?

<sup>14</sup> Авторы задачи: Мартынов Петр, Котова Надежда и Евдокимов Сергей