Математика оптимизации и микроэкономика. Занятие 1.

Определение 1. *Функцией* $f(x) = y$ называется зависимость переменной y от переменной x, где каждому значению x из области определения соответствует ровно одно значение y. Переменная x называется *аргументом (независимой переменной)* функции $f(x)$, а переменная y — *значением функции (зависимой переменной)*. *Областью определения* функции $f(x)$ называется множество значений, которые может принимать переменная x.

Определение 2. Если в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$, целиком содержащейся в области определения функции f при всех x из этой окрестности:

1. $f(x) \leqslant f(x_0)$, то x_0 называется *точкой максимума* функции f.
2. $f(x) \geqslant f(x_0)$, то x_0 называется *точкой минимума* функции f.

   Точки максимума или минимума называются *точками экстремума* функции.

Оптимизация непрерывных функций без использования производной

Все задачи в этом блоке нужно решать, не прибегая к дифференцированию и программным средствам.

Теорема 1 (об экстремуме квадратичной функции)**.** *Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ при $a \neq 0$ имеет ровно один экстремум: $x^* = -b/2a$. При этом данная точка является максимумом при $a < 0$ и минимумом при $a > 0$.*

Задача 1. Найдите точки максимума и минимума функции $f(x) = 5x^2 + 10x - 109$

Теорема 2. *Пусть $g(y)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция. Тогда если функция $y = f(x)$ достигает максимума (минимума) в точке x^*, то и функция $g(f(x))$ достигает максимума (минимума) x^*.*

Задача 2. Найдите точки максимума и минимума функции $f(x) = (-9x^2 + 6x - 80)^{243} + 100500$

Задача 3. Найдите точки максимума и минимума функции $f(x) = |x^2 + 5x + 7| - 100$

Задача 4. Найдите точки максимума и минимума функции $f(x) = |x^2 + 5x - 7| - 100$

Задача 5. Обратная функция спроса на продукцию фирмы-монополиста линейна, как и функция средних издержек. Известно, что прибыль фирмы максимальна только при объеме выпуска, равном 11, а при объеме выпуска, равном 6, она получает нулевую прибыль. Существуют ли другие значения объема выпуска, приносящие нулевую прибыль? Если да, найдите все такие значения.

Задача 6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = -5x^2 - 10x + 7$ на отрезке $[-5, 0]$.

Задача 7. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = |-x^2 - 6x + 7|$ на отрезке $[1, 3]$.

Задача 8. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = |x^2 - 3x + 2|$ на отрезке $[-10, 10]$.

Задача 9. Найдите наименьшее значение функции $y = x^2 + 16/x^2$

† **Задача 10.** Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = \sin(x + \pi/2) + \cos(7x)$

† **Задача 11.** Фирма «AVC» является совершенным конкурентом как на рынке конечного продукта, так и на рынке труда. Труд является для данной фирмы единственным переменным фактором производства. Производственная функция фирмы имеет вид $Q = 4 + \sqrt[3]{L - 64}$, где Q — объем выпускаемой продукции, L — количество используемого труда. На рынке конечного продукта установилась цена, равная 60. При каком максимальном значении зарплаты одного работника фирма останется на рынке в краткосрочном периоде?

† **Задача 12.** Найдите у функции точки максимума и минимума $f(x) = |x - 1| + |x - 2| + ... + |x - 1535|$.

† **Задача 13.** Докажите теорему 1.

† **Задача 14.** Докажите теорему 2.

Дискретная оптимизация

Все задачи в этом блоке нужно решать, не прибегая к дифференцированию.

Иногда требуется найти наибольшее или наименьшее значение функции, область определения которых — это не не множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$, а множество целых чисел $\mathbb{Z}$ (или — часто в экономике — множества целых неотрицательных чисел $\mathbb{Z}_+$). Например, количество товара, потребляемого потребителем или производимого фирмой, может измеряться только целыми неотрицательными числами.

Чтобы решать такие задачи, можно проигнорировать целочисленность и найти максимум функции так, как будто она определена на $\mathbb{R}$. Если окажется, что нужный экстремум — целый, то больше ничего делать не нужно: ведь если в какой-то точке функция принимает, скажем, наибольшее значение *среди всех чисел*, то она тем более принимает наибольшее значение *среди целых чисел*.

Иногда, однако, это не так: максимальное (минимальное) значение не попадает в нужное множество. Тогда самое большое значение достигается в одной из двух целочисленных точек, соседних с одним из локальных максимумов (минимумов) — не обязательно ближайшего соседа и не обязательно самого высокого (низкого).

Задача 15. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 4x^2 + 8x + 100500$ при $x \in \mathbb{Z}$.

Задача 16. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = -15x^2 + 392x + 1{,}2$ при $x \in \mathbb{Z}$.

Задача 17. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = (15 - p)(p - 8) - 100500$ при $x \in \mathbb{Z}$.

† **Задача 18.** Изобразите графически примеры (или докажите, что их нет), в которых глобальный максимум функции на множестве целых чисел $\hat{x}$ не совпадает с глобальным максимумом на множестве действительных чисел x^*, при этом

а) $\hat{x}$ является одной из двух ближайших к x^* целочисленных точек, но не ближайшей;

б) $\hat{x}$ не является одной из двух ближайших к x^* целочисленных точек.

Иногда полезно думать о *приращении* функции в двух соседних точках. До тех пор, пока оно положительное (то есть n-й член последовательности больше, чем $(n-1)$-й), функция возрастает; как только оно становится отрицательным — убывает (значит, при смене знака приращения функция переходит через экстремум).

Задача 19. Найдите номер наибольшего члена последовательности $y_n = n^{10}/2^n$ (можно использовать калькулятор).

Задача 20. Вася устроился на работу с зарплатой 60 000 руб. в месяц, которая выплачивается в конце каждого месяца. Половину своего заработка он откладывает на черный день в ящик стола.

а) Через сколько месяцев реальная величина[1] накоплений Васи, хранящихся в ящике стола, достигнет своего максимума, если уровень инфляции стабилен и составляет 2,5 % в месяц?

б) Ответьте на тот же вопрос, если деньги Вася откладывает не в ящик стола, а на депозит в банке, ставка процента по которому составляет 2,5 % в месяц.

† **Задача 21.**[2] Марк Цукерберг имеет 10 000 $ долларов. Каждые пять дней он ездит на вечеринки. Известно, что Марк тратит в четыре раза больше денег на i вечеринке, чем на предыдущей $i-1$, а также что на первой вечеринке он потратил всего лишь 1$. Сколько дней нужно, чтобы Марк стал банкротом? Его первая вечеринка была в 1-й день.

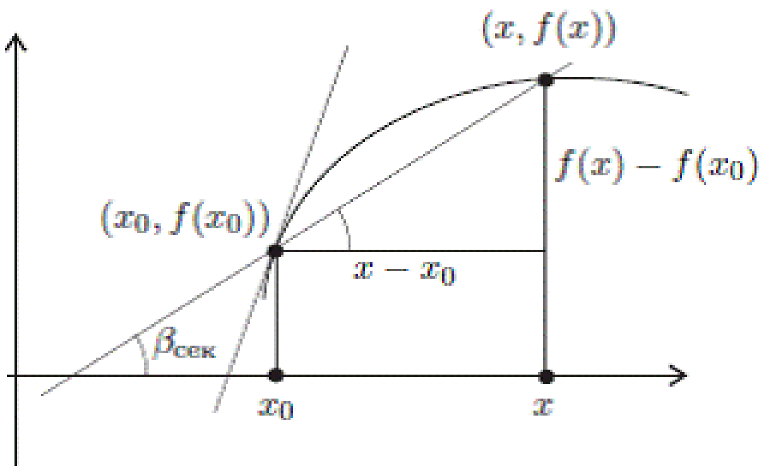
Производная

Определение 3. Функция $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *дифференцируемой* в точке $x_0 \in X$ если существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

называемый *производной функции* f в точке x_0 и обозначаемый через $f'(x_0)$.

Примечание 2 (о геометрической интерпретации производной). Выражение $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ под знаком предела в определении производной есть тангенс угла, образованного прямой, проходящей через точки графика функции f с координатами $(x_0, f(x_0))$ и $(x, f(x))$, с положительным направлением оси Ox.



Определение 4. *Касательной к графику* дифференцируемой в точке x_0 функции f называется прямая, проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$ и образующая с положительным направлением оси Ox угол, тангенс которого равен $f'(x_0)$.

Уравнение касательной к графику функции f в точке x_0 может быть представлено в виде

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

[1] *Реальная величина* — рассчитанная в сопоставимых ценах, то есть «очищенная» от влияния инфляции и отражающая покупательную способность.

[2] Идея взята из Stanford Math Tournament, General Test

Теорема 3. *Если функции f и g дифференцируемы в точке x_0, то в той же точке дифференцируемы функции $h_1 = f + g, h_2 = f - g, h_3 = f \cdot g, h_4 = f/g$ (последняя при условии $g(x_0) \neq 0$), причем*

$$h_1' = f' + g',\ \ h_2' = f' - g',\ \ h_3' = f'g + fg',\ \ h_4' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Примечание 3. Постоянный множитель разрешается выносить за знак производной $(Cf(x))' = Cf'(x)$.

Теорема 4. $g'(f(x)) = g'(f)f'(x)$.

Теорема 5 (производные основных элементарных функций)**.** 1.$(const)' = 0$; *2.* $(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$; *3.* $(a^x)' = a^x \ln a$.

Задача 22. Найдите тангенс угла наклона секущей:
а) У функции $y = \sqrt{x}$ в точке $x = 2$ при увеличении x на 1.
б) У функции $y = (x - 3)(x - 5)$ в точке $x = 5$ при увеличении x на $0,5$
в) У функции $y = x^3 + 5x^2 - 4x - 5$ в точке $x = 4$ при увеличении x на 4

Теорема 6. *Если $f'(x_0) > 0$, то x_0 — точка возрастания функции f; если $f'(x_0) < 0$, то x_0 — точка убывания функции f. В точке максимума или минимума производная равна нулю или не существует.*

Теорема 7. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда если для всех $x \in (a, b)$*

1. *$f'(x) > 0$, то функция f возрастает на отрезке $[a, b]$;*

2. *$f'(x) < 0$, то функция f убывает на отрезке $[a, b]$;*

3. *$f'(x) = 0$, то функция f постоянна на отрезке $[a, b]$.*

Нестрогое следствие. Если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с «+» на «$-$», то x_0 — точка максимума, а если с $-$ на «+», то x_0 — точка минимума. Если знак не меняется,то экстремума нет.

Задача 23. Найдите интервалы монотонности и исследуйте на экстремумы функции:
а) $y = x^2$;
б) $y = x^3$;
в) $y = x^3 + 1$;
г) $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

Задача 24. Найдите предельные издержки в точке $Q = 7$, если функция издержек имеет вид $TC(Q) = Q^3 + 4Q - 2Q^2 + 1$

Задача 25. Найдите глобальный минимум функции $y = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 5x - 1$ на $[-10; 5] \cup [4; +\infty]$

Задача 26. Функция прибыли задана следующим образом: $\pi = -x^3 + 4x^2 - 5x - 4$. Найдите максимальное значение прибыли.

Задача 27. Решите предыдущую задачу, если известно, что можно произвести не менее одной единицы продукции

Задача 28. Предельная выручка задается функцией $MR = 10 - 2x$, а предельные издержки — $MC = 25 - 10x + x^2$. Особенности производства таковы, что невозможно произвести более десяти единиц продукции. Найдите максимум прибыли.

Задача 29. Функция общих издержек задана $TC(Q) = q^3 - 6q^2 + 10q + 32$.
а) Найдите $AC(Q), MC(Q), \min AC(Q)$. Известные Вам кривые нарисуйте.
б) Убедитесь, что совпадение $\min AC(Q^*)$ и точки пересечения кривых $AC(Q)$ и $MC(Q)$ не случайно.
в) Докажите, что если предельные издержки фирмы возрастают, то в точке минимума средних издержек, если она существует, средние издержки равны предельным.

† **Задача 30.** Фирма «Шутка», работающая на конкурентном рынке, занимается производством смеха. Фирма обнаружила довольно странную функцию общих издержек, характерных только для производства смеха: $TC(Q) = \sqrt{Q}$, где Q - объем выпуска единиц смеха. Одной произведенной единицы смеха достаточно, чтобы насмешить одного человека. Постоянные издержки производств смеха отсутствуют. Определите уравнение функции предложения фирмы в краткосрочном периоде $Q_s(P)$, полагая, что по техническим причинам фирма «Шутка» может максимально произвести объем продукции, достаточный, чтобы рассмешить 100 человек.

† **Задача 31.** Если на рынке установится цена P, то максимальная прибыль, которую сможет получить совершенно конкурентная фирма «Трюк», будет равна $\pi_{max}(P) = 125P^2 + 2,25P - 2009$.

Определите минимальное значение средних издержек фирмы

† **Задача 32.**[3] Заботясь о сохранении редких видов рыб, государство собирается ввести на рынке черной икры потоварный налог. С помощью этой меры оно надеется не только ограничить потребление икры, но и получить средства для финансирования дорогостоящей экологической программы. Таким образом, убивая двух зайцев, можно будет спасти тысячи рыб! Экономисты правительства оценили для данного рынка кривую Лаффера при введении потоварного налога:

$$T = \frac{200900t}{(1+t)^2}$$

Где t – ставка налога (в. тыс. руб.), T – общая сумма налоговых поступлений (также в тыс. руб.). На сколько процентов государству удастся максимально сократить объем потребления икры, если с помощью налога нужно собрать не менее 48216 тыс. руб. (именно столько стоит программа)?

Пример 1. Фирма — совершенный конкурент на рынке своего продукта и на рынке труда, максимизирует свою прибыль. Докажите, что выражение $P \cdot MP_L = w$ будет выполняться в точке максимума прибыли, если $VC(Q) = w \cdot L, FC \neq 0, TP(L) = Q(L)$ (все функции непрерывно дифференцируемы).

Решение.
$\Pi(Q(L)) = TR(Q(L)) - TC(Q(L)) = P \cdot Q(L) - w \cdot L - FC \to \max\limits_L \Rightarrow P \cdot MP_L = w$

† **Задача 33.** Докажите выражение из примера 1 самостоятельно, если:

а) Фирма - совершенный конкурент на рынке своего продукта и монопсонист на рынке труда;
б) Фирма - монополист на рынке своего продукта и монопсонист на рынке труда;

† **Задача 34.** Найдите максимум функции $y = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x^2 + 1}$

[3] Всероссийская олимпиада школьников по экономике, 2009 год

† **Задача 35.** Найдите глобальный минимум функции $y = \dfrac{x^3}{1+x}$ на промежутке $[-\infty; -1)$

† **Задача 36.** Найдите глобальный максимум функции $-x^2(x-1)^3$ на промежутке $(-\infty; -0,16] \cup$ $\cup [0{,}3; 0{,}7]$

† **Задача 37.**[4] Найдите максимум функции $y = \dfrac{-x^3+5x^2-6x-2}{x+1}$ при $x \leqslant \frac{5}{2}$

† **Задача 38.** Найдите глобальный максимум функции $y = -2x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 8x - 5$

† **Задача 39.** Решите предыдущий номер, если функция задана на промежутке $(-\infty; -2] \cup$ $\cup [0; +\infty) \setminus (2; 4)$

† **Задача 40.**[5] Кривая спроса на монопольном рынке задана функцией $Q = 100/P^2$. Краткосрочные предельные издержки фирмы имеют вид $MC = 10/(Q+1)$. Определить оптимальный объем выпуска. Допустим, открыта новая технология, которая позволяет фирме вдвое увеличить максимальную границу объема выпуска в краткосрочном периоде, но не изменяет функцию издержек.

[4] Источник задачи

[5] Всероссийская олимпиада школьников по экономике, 2005 год