

2. Игры в развернутой форме и SPNE

Летняя экономическая школа «I Love Economics»

Курс: Элементы теории игр

Преподаватель: Андрей Бремзен

Ассистенты: Степан, Аня Д., Настя, Аня М., Дмитрий

Покровский, Рита, Ксюша, Лиза, Лина

Дедлайн: 21 августа 2017 21:00



Определение 1. Равновесием по Нэшу, совершенным по подыграм (Subgame Perfect Nash Equilibrium, SPNE) называется такое равновесие по Нэшу, где стратегии участников являются также равновесными при сужении на любую подыгру (в том числе *не реализующуюся на равновесном пути*).

Задача 2.1

Клара и Карл делят четыре абсолютно одинаковых гобоя. Карл предлагает некоторый делёж, а Клара может либо согласиться на делёж, либо отказаться от него. В случае отказа никто не получает ничего. И Клара, и Карла интересуют только число полученных лично ими гобоев.

- Сколько стратегий у Клары?
- Сколько в данной игре равновесий по Нэшу совершенных на подыграх?

Задача 2.2

Эльфы-Нолдор хотят пересечь море на кораблях, но строить корабли не умеют. Нолдор могут либо отказаться от затеи, либо потребовать от эльфов-Тэлери отдать свои корабли. Тэлери могут отдать корабли Нолдор, либо вступить в схватку. Будем предполагать, что любые эльфы предпочитают спокойствие военным действиям.

- Формализуйте игру, подобрав платежи в соответствии с предпочтениями, и изобразите дерево игры.
- Найдите в данной игре NE и SPNE.
- Что изменится, если Нолдор заранее узнают, что вера не позволяет Тэлери отдавать корабли.

Задача 2.3

Фирма и профсоюз ведут спор о трудовом соглашении. Профсоюз отстаивает интересы рабочих, лоббируя уровень заработной платы w , после чего фирма максимизирует собственную прибыль, выбирая, какое количество рабочих нанять. Выпуск фирмы зависит от количества нанятых рабочих (L), $q(L) = L - L^2/2$, цена на продукцию фирмы фиксирована и равна $p = 1$, издержки фирмы – только оплата труда рабочих. Целевая функция профсоюза – максимизация фонда заработной платы.

- Опишите, что является стратегией фирмы и что является стратегией профсоюза.
- Найдите SPNE.

Задача 2.4

N голодных львов делят добычу. Порядок дележа следующий: сначала самый старый лев решает съесть антилопу в одиночку или отпустить ее. Если отпускает, то на этом делёж заканчивается. Если лев съедает антилопу, ход переходит к следующему по старшинству льву, и, поскольку антилопы уже нет, то второй лев решает: съесть ли первого льва или отпустить. Если отпускает, делёж завершается. Если второй лев съедает первого, ход переходит к третьему по старшинству льву и так далее. Предпочтения

у львов следующие: быть сытым и живым $>$ быть голодным, но остаться в живых $>$ быть съеденным более молодым львом. Найдите SPNE, если в прайде:

- 2 льва
- 3 льва
- 4 льва
- Решите задачу для произвольного n

Задача 2.5

Бифур и Глон делят шоколадку 6×6 . Сначала Бифур распределяет шоколад. Если Глон соглашается с дележом, то игра заканчивается. Если Глон не согласен с исходом, прилетает дракон, и съедает дольку шоколада. После этого процедура повторяется, но теперь уже Глон делает предложение, и так далее, пока они не придут к соглашению, либо от шоколадки ничего не останется. Гномы умеют делить шоколад только по долькам. Гномы любят шоколад, но при прочих равных, каждый отдаёт предпочтение варианту, в котором второй получает больше. Укажите какой делёж будет реализован.

Задача 2.6

Три гнома из-под холма не любят людей и любят золотые монеты. Вчера на холм приземлился дракон. Каждый из трёх гномов завтра предложит дракону есть жителей одной из двух близлежащих деревень: A или B . Драконы прислушиваются к мнению большинства.

Сегодня утром гномы пойдут к жителям деревни A , расскажут о потенциальной угрозе и предложат откупиться. У жителей деревни A есть золотой запас a . Жители могут распределить деньги между гномами. Вечером гномы пойдут к жителям деревни B , расскажут им о нависшей опасности и о том, какое предложение им сделали жители A . У жителей B есть золотой запас b , который они могут распределить между гномами. Завтра гномы решат, за кого голосовать. Каждый гном настаивает на деревне, предложившей меньше денег. В случае равенства гном настаивает на деревне A (её не любят больше).

Монеты бесконечно делимы. Люди в первую очередь любят жить, но независимо от того выживают или нет предпочитают большее количество монет меньшему.

- Пусть $a = b$. Укажите оптимальную стратегию поведения жителей B при экзогенно заданном поведении жителей A .
- Пусть $a < b$. Могут ли жители A выжить? Пусть $a > b$. Могут ли выжить жители B ? Докажите утверждение или приведите контрпример.
- Найдите SPNE в данной игре.

Задача 2.7

Три партии A , B и C , за которые готовы проголосовать 40, 25 и 20 избирателей соответственно, борются за места в парламенте и решают, какую позицию занять перед выборами – правую или левую. Страна устроена так, что парламент может быть либо правым, либо левым, и выбирается сторона, за которую проголосовало больше избирателей (избиратели голосуют за свою партию). Прошедшие в парламент партии получают доли мест в соответствие с количеством проголосовавших за них избирателей. Так, если партии A и C заняли правую позицию, а B левую, то A и C проходят в парламент и получают $2/3$ и $1/3$ мест в парламенте соответственно. Партии принимают решение последовательно, а вот решение о *порядке выбора* позиций перед этим принимает партия A . Каждую партию интересует лишь доля полученных ею мест в парламенте.

- Укажите, какое решение о порядке голосования примет партия A и почему.
- Укажите количество стратегий партии A .

Задача 2.8

Настюша и Ксюша решили приготовить печенье. Количество приготовленного печенья равно $C = n + k$, где n и k - усилия Настюши и Ксюши соответственно. Сначала Настюша предлагает приготовить печенье и говорит сколько усилий она готова на это затратить. После этого Ксюша говорит сколько усилий готова затратить она. Если при заявленных усилиях количество печенья не менее 50, то они готовят его, прилагая столько усилий, сколько заявили. В противном случае они не готовят ничего и получают полезность 0. Девушки не любят трудиться, но если они начали готовить, то предпочитают, чтобы им помогали, поэтому их функция полезности выглядит следующим образом: $U_k = \frac{C}{2} + n - k$, $U_n = \frac{C}{2} + k - 2n$. Сколько усилий затратит каждая девочка SPNE.