МО-1. Олимпиада

Летняя экономическая школа «I Love Economics»
Курс: Элементы математического анализа
Преподаватель: Илья Щуров
Ассистенты: Р. Бахарев, Д. Гущин, А. Зотов, Н. Киселев, А. Медведева, Е. Савинова, Д. Табашникова, М. Хван
Дедлайн: 12 августа 2017 г.

Задача МО-1.1. Оптимальная цена при неизвестном спросе

Некоторая фирма-монополист хотела бы установить цену, максимизирующую выручку, однако функция спроса $D(p)$ известна фирме лишь примерно (что соответствует реальности для большинства фирм). А именно, фирма знает, что для каждой цены $p \in [0; 26]$ выполнено

$$24 - p \leqslant D(p) \leqslant 26 - p,$$

а также что при $p > 26$ спрос равен нулю. Другой информации о функции спроса нет. В частности, она необязательно линейна.

Какие значения может принимать цена, при которой выручка фирмы максимальна?

Алексей Суздальцев, Всерос-2017

Задача МО-1.2

Рассмотрим функцию:

$$f(a) = \max_{x \in [-1,2]} (ax^2 - 2x).$$

Иными словами, для каждого a значение $f(a)$ находится как наибольшее значение, которое функция $g_a(x) = ax^2 - 2x$ принимает на отрезке $[-1, 2]$.

Построить график функции f на отрезке $[-3, 3]$.

МО-2. Олимпиада

Летняя экономическая школа «I Love Economics»
Курс: Элементы математического анализа
Преподаватель: Илья Щуров
Ассистенты: Р. Бахарев, Д. Гущин, А. Зотов, Н. Киселев, А. Медведева, Е. Савинова, Д. Табашникова, М. Хван
Дедлайн: 13 августа 2017 г.

Задача МО-2.1

В некотором царстве, некотором государстве, на рынке имеются два товара — кукумбрики и зязямбрики. Полезность набора из $x \geqslant 0$ кукумбриков и $y \geqslant 0$ зязямбриков для покупателя летом равняется $u(x, y)$, где u — некоторая дифференцируемая функция (x и y — вещественные числа). Зимой полезность того же набора равняется $v(x, y) = g(u(x, y))$, где g — некоторая дифференцируемая функция, причём $g' > 0$ во всех точках. Как связаны предельные нормы замещения для этих двух товаров летом и зимой? Напомним, что для функции полезности $u(x, y)$ предельной нормой замещения называется отношение частных производных $\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y}$. Эта величина показывает, сколько нужно добавить одного товара, чтобы компенсировать уменьшение количества другого товара на 1.

Задача МО-2.2

Найти все значения параметра a, при которых у функции $f(x) = 2x^3(a^2+1)+3x^2(a^5-a^3+a)+6x(a^2-1)$ есть ровно две точки экстремума, причём значения x, в которых достигаются экстремумы, не равны нулю и имеют разные знаки.

Задача МО-2.3

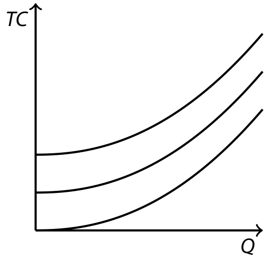
Найти $\max(x^2 + 4y^2)$ в области $|xy| \leqslant 1/2$, $|x| \leqslant 2$, $|y| \leqslant 1$.

МО-3. Олимпиада

Летняя экономическая школа «I Love Economics»
Курс: Элементы математического анализа
Преподаватель: Илья Щуров
Ассистенты: Р. Бахарев, Д. Гущин, А. Зотов, Н. Киселев, А. Медведева, Е. Савинова, Д. Табашникова, М. Хван
Дедлайн: 14 августа 2017 г.

Задача МО-3.1

Илья Муромец, Добрыня Никитич и Алёша Попович вышли на пенсию и занялись производством былин о своём героическом прошлом. В силу индивидуальных особенностей их функции издержек различаются. Обозначим их через TC_1, TC_2, TC_3 соответственно. На рисунке изображены графики этих функций (снизу вверх в указанном порядке). Фиксированные издержки у Добрыни и Алёши несутся даже в том случае, если конкретный богатырь не производит былин вообще.



Для оптимизации издержек они хотели бы распределить работу между собой. Для производства Q былин они выбирают такие $Q_1 \geqslant 0, Q_2 \geqslant 0, Q_3 \geqslant 0$, что $Q_1+Q_2+Q_3 = Q$ и $TC(Q) = TC_1(Q_1)+TC_2(Q_2)+TC_3(Q_3)$ минимально по всем способам разбить Q в сумму неотрицательных Q_1, Q_2, Q_3.

Построить график $TC(Q)$.

Задача МО-3.2

Привести пример функции f, определённой при всех вещественных x, чётной и для всех x удовлетворяющей уравнению:

$$f(x) + f(5 - x) = 2.$$

Доказать, что любая такая функция будет периодической.

Задача МО-3.3

Доказать либо опровергнуть следующее утверждение: если функция f дифференцируема в точке $x = a$ и имеет в ней положительную производную, то существует такая окрестность точки a, что функция f монотонно возрастает на всей этой окрестности

МО-4. Олимпиада

Летняя экономическая школа «I Love Economics»
Курс: Элементы математического анализа
Преподаватель: Илья Щуров
Ассистенты: Р. Бахарев, Д. Гущин, А. Зотов, Н. Киселев, А. Медведева, Е. Савинова, Д. Табашникова, М. Хван
Дедлайн: 16 августа 2017 г.

Задача МО-4.1

Построить функцию, определённую при всех x и дифференцируемую ровно в одной точке (а в остальных — не дифференцируемую). (Если эта задача вам показалась простой, можете попробовать построить функцию, непрерывную во всех точках и дифференцируемую только в одной.)

Задача МО-4.2

Для любого натурального n найти n-ю производную функции

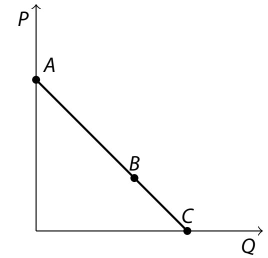
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

в точке $x = 0$.

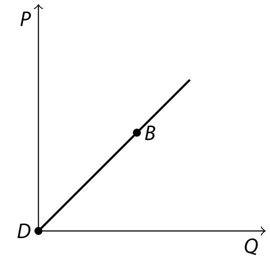
Подсказка: известно, что e — это такое число, лежащее между 2 и 3, что $(e^z)' = e^z$ для всех z; также известно, что $\lim_{x\to+\infty} x^k/e^x = 0$ для всякого натурального k.

Задача МО-4.3

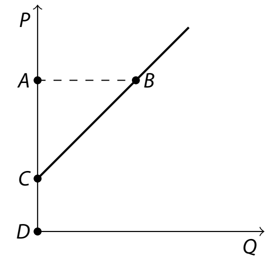
Доказать следующие утверждения про эластичность для зависимостей спроса от цены, указанных на картинках. Эластичность всегда вычисляется в точке B. Масштабы по осям не заданы, наклон прямой может быть произвольным.



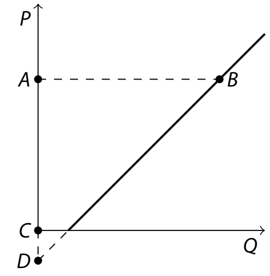
$$|E_d^p| = \frac{BC}{AB}.$$



$$E_s^p = 1.$$



$$E_s^p = \frac{AD}{AC}.$$



$$E_s^p = \frac{AC}{AD}.$$

МО-5. Олимпиада

Летняя экономическая школа «I Love Economics»
Курс: Элементы математического анализа
Преподаватель: Илья Щуров
Ассистенты: Р. Бахарев, Д. Гущин, А. Зотов, Н. Киселев, А. Медведева, Е. Савинова, Д. Табашникова, М. Хван
Дедлайн: 17 августа 2017 г.

Задача МО-5.1

В одной очень-очень свободной и демократической стране крестьяне обязаны сдавать государству всё, что у них вырастет на полях. Если какая-то часть поля не засеяна, то она зарастает сорняками. Один крестьянин имеет несколько полей, на которых он может выращивать картошку (а если у него диссидентские взгляды, то часть поля он может не засеивать). С каждого гектара, засеянного сорняками, любое поле дают одну тонну урожая сорняков, а с каждого гектара, засеянного картошкой, даёт некоторое количество картошки — своё для каждого поля. КПВ всех полей (в координатах картошка — сорняки) линейны и имеют попарно разный наклон. Опишите множество точек (в системе координат картошка — сорняки), соответствующие объёмам продукции, которые может производить крестьянин, если:

а) у него 2 поля;
б) у него 3 поля;
в) у него n полей.

Задача МО-5.2

В ЛЭШ приехали 152 участника, некоторые из которых не дружат между собой. Каждый участник состоит в нескольких группах, причём нет двух групп с совпадающим составом. Оказалось, что участники, состоящие в одной группе, дружат, но если участник не состоит в какой-то группе, то он не дружит хотя бы с одним её участником. Какое наибольшее число групп может быть в ЛЭШ?

Задача МО-5.3

Один из ассистентов очень устал после дискотеки и не смог идти. Ассистент предложил школьникам заработать и отнести его домой за hseuro. Каждый из трех согласившихся школьников прикладывает некоторое количество усилий (x, y, z). Время, которое будет потрачено на этот процесс, равно $\frac{1}{f(x,y,z)}$, где $f(x, y, z) = 3x^2 + 5y^2 + z^2$. Денег у ассистента немного и он готов потратить ровно 1 тыс. hseuro. Школьники знают, что ассистент готов по крайней мере потратить тысячу (он об этом случай сказал) и не готовы работать меньше, чем за эту сумму. Оплата производится в соответствии с приложенными усилиями, поэтому имеется ограничение в виде $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Найдите минимальное и максимальное время доставки ассистента домой.