A. Продвинутые пределы

Летняя экономическая школа «I Love Economics»
Курс: Элементы математического анализа
Преподаватель: Илья Щуров
Ассистенты: Р. Бахарев, Д. Гущин, А. Зотов, Н. Киселев, А. Медведева, Е. Савинова, Д. Табашникова, М. Хван
Дедлайн: 14 августа 2016 г.

Это дополнительный листок повышенной сложности. Вы можете его не сдавать вообще. Если же вы всё-таки хотите его сдавать, то можете это сделать только в том случае, если уверены в том, что умеете сдавать все задачи из листка №1. При сдаче этого листка вас в любой момент могут попросить сдать любую задачу из листка №1. Если вы не сможете этого сделать, то вы лишитесь права сдавать данный листок. Навсегда.

Определение 1. Для некоторой точки a её ε-окрестностью (читается *эпсилон-окрестностью*) $U_\varepsilon(a)$ называется интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Проколотой ε-окрестностью называется множество $\mathring{U}_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$.

Определение 2. Строгое определение предела. Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки a. Говорят, что функция *f имеет предел b* в точке a, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всякого $x \in \mathring{U}_\delta(a)$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$

Пишут:

$$f(x) \to b \text{ при } x \to a$$

или

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

Это не самое простое определение в вашей жизни. Понять его «с первого прочтения» невозможно. Чтобы немного освоиться с языком, который в нём используется (он называется «языком кванторов», потому что слова «для всякого» и «существует» по-научному называются кванторами), попробуем доказать некоторые простые утверждения о пределах, пользуясь только определением. Если вы не знаете, как подступиться к этим задачам, но хотите их решить — не стесняйтесь спросить совета преподавателей и ассистентов.

Задача A.1

Доказать, что $\lim_{x\to 0} (2x) = 0$.

Подсказка: попробуйте взять какое-нибудь конкретное значение ε — например, $\varepsilon = 0{,}1$ — и найти подходящее значение δ; затем докажите, что подобрать подходящее δ можно при любом ε.

Задача A.2

Доказать что

а) $\lim_{x\to 2} 4 = 4$;
б) $\lim_{x\to 1} (2x + 3) = 5$;
в) $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$;
г) $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$;
д) $\lim_{x\to 0} |x| = 0$;
е) $\lim_{x\to a} x = a$.

Теперь мы умеем решать конкретные примеры с помощью определения. Однако дело это трудоёмкое и не очень приятное. На практике люди чаще всего для вычислений используют *арифметику пределов* (см. листок 1), а вот сама теорема об арифметике пределов доказывается как раз с помощью определений. Однако прежде, чем мы перейдём к этой части, нужно разобрать более простую задачу, использующую кванторный язык.

Задача A.3

Рассмотрим два определения ограниченной последовательности:

1. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется *строго ограниченной*, если существует такое C, что для всех натуральных k, $|a_k| < C$.
2. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется *слабо ограниченной*, если существует такое C, что для всех натуральных k, $|a_k| \leqslant C$.

Являются ли эти определения эквивалентными? Иными словами, верно ли, что любая строго ограниченная последовательность является слабо ограниченной и наоборот, любая слабо ограниченная является строго ограниченной. Если это верно, докажите. Если неверно, приведите пример последовательности, ограниченной согласно одному определению и не ограниченной согласно второму.

Задача A.4

Докажите с помощью определения предела, что

$$\lim_{x\to a} cf(x) = c \lim_{x\to a} f(x).$$

Подсказка: В качестве нового δ можно взять старое для ε/c.

Задача A.5

Докажите, что предел суммы двух функций равен сумме пределов (если они существуют).

Задача A.6

Докажите, что функция, имеющая предел в некоторой точке, ограничена в некоторой окрестности этой точки

Задача A.7

Докажите, что предел произведения равен произведению пределов (если эти пределы существуют).
Подсказка: нужно воспользоваться предыдущей задачей.

Задача A.8

Докажите, что предел частного равен частному пределов (если оба предела существуют и предел знаменателя отличен от нуля).