5. Оптимизация функций нескольких переменных

Летняя экономическая школа «I Love Economics»
Курс: Элементы математического анализа
Преподаватель: Илья Щуров
Ассистенты: Р. Бахарев, Д. Гущин, А. Зотов, Н. Киселев, А. Медведева, Е. Савинова, Д. Табашникова, М. Хван
Дедлайн: 18 августа 2017 г.

Теорема 1 (Необходимое условие экстремума). *Пусть функция двух переменных f определена во всех точках (x,y), $x \in (a,b)$, $y \in (c,d)$. Пусть $x_0 \in (a,b)$ и $y_0 \in (c,d)$ и точка (x_0,y_0) является точкой локального экстремума (максимума или минимума) функции f. Если существуют частные производные $f'_x(x_0,y_0)$ и $f'_y(x_0,y_0)$, то они обе равны нулю.*

Задача 5.1

Рассмотрим функцию $f(x,y) = -x^2 - 4y^2 + 20xy$.

а) Найти все точки, в которых обе частные производные функции f обращаются в нуль.
б) Построить сечения графика $z = f(x,y)$ плоскостями $x = 0$ и $y = 0$.
в) Можно ли сделать вывод, что $(0,0)$ является точкой локального максимума функции f?
г) Построить сечение графика $z = f(x,y)$ плоскостью $x = y$.
д) Что вы теперь думаете насчёт максимума функции f?

Чтобы не попасть в ловушку, продемонстрированную предыдущей задачей, можно использовать следующий приём. Пусть мы хотим найти глобальный максимум функции $f(x,y)$. Зафиксируем какое-то произвольное число y_0 и рассмотрим функцию $h_{y_0}(x) = f(x,y_0)$. Это функция одной переменной. Пусть её глобальный максимум достигается в точке x^*. Поскольку функция h_{y_0} разная для разных y_0, то и x^* вообще говоря зависит от y_0. Так что мы будем писать $x^*(y_0)$. При некоторых y_0 может быть несколько глобальных максимумов, выберем один из них (неважно, какой). Теперь для каждого y_0 найдём наибольшее значение функции f, достигаемое в точках с $y = y_0$. Оно равняется $f(x^*(y_0), y_0)$. Обозначим эту штуку через $g(y_0)$ — это функция одной переменной y_0. Найдём её глобальный максимум, пусть он находится в точке y^*. Тогда глобальный максимум функции f достигается в точке $(x^*(y^*), y^*)$.

Задача 5.2

С помощью описанного выше метода найти максимум данной функции двух переменных, либо показать, что максимума нет.

а) $f(x,y) = -x^2 + 2x - y^2 - 4y$;
б) $f(x,y) = -x^2 + 2x - y^2 - 4y + xy$.
в) $f(x,y) = -x^2 + 6xy + 10x - 4y^2 - 20y - 20$.

Аналогичный метод можно использовать для поиска экстремумов функций на подмножествах.

Задача 5.3

Найти максимум функции на указанном множестве

а) $f(x,y) = -x^2 + y$, $x \in [-1,2]$, $y \in [-2,1]$;
б) $f(x,y) = -x^2 - 2xy$, $x \in [-2,2]$, $y \in [-1,1]$;
в) (*) $f(x,y) = y^3 - 3xy$, $x \in [-1,1]$, $y \in [-2,2]$.

Иногда бывает полезно с помощью необходимого условия экстремума доказать, что экстремум не достигается во внутренних точках интересующего нас множества, после чего исследовать граничные точки «вручную», выражая уравнение границы в виде $y = y(x)$ или $x = x(y)$ и подставляя результат в исходную функцию.

Задача 5.4

Найти максимум функции $f(x,y) = xy$ на множестве $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + 2y \leqslant 2$.

Задача 5.5

Найти максимум функции $f(x,y) = x^2 + y^2$ на множестве $x \geqslant -1$, $y \geqslant 0$, $x + 2y \leqslant 2$.

Задача 5.6

Найти максимум и минимум функции $f(x,y) = x^2 - y^2$ на множестве $|x| + |y| \leqslant 1$.

Задача 5.7

Найти максимум и минимум функции $f(x,y) = x^2 - y^2$ на множестве $\max(|x|,|y|) \leqslant 1$.

Задача 5.8 (†)

Рассмотрим функцию $f(x,y) = -x^2 - 4y^2 + xy$. Показать, что для всех значений параметра a сечение графика $z = f(x,y)$ плоскостью $y = ax$ является параболой с ветвями, направленными вниз и вершиной в нуле. Что вы можете сказать о максимуме функции $f(x,y)$?

Задача 5.9 (†)

Рассмотрим функцию $f(x,y) = -x^2 - 4y^2 + \beta xy$. Найти все значения параметра β, при которых функция f имеет максимум в точке $(0,0)$. Подсказка: рассмотреть сечение графика $z = f(x,y)$ плоскостью $y = ax$.

Задача 5.10 (†)

Рассмотрим функцию $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. При каких значениях параметров a, b и c эта функция имеет максимум в точке $(0,0)$?