

## 5. Оптимизация функций нескольких переменных

Летняя экономическая школа «I Love Economics»

Курс: Элементы математического анализа

Преподаватель: Илья Щуров

Ассистенты: Р. Бахарев, Д. Гушин, А. Зотов, Н. Киселев,  
А. Медведева, Е. Савинова, Д. Табашникова, М. Хван

Дедлайн: 18 августа 2017 г.



**Теорема 1** (Необходимое условие экстремума). Пусть функция двух переменных  $f$  определена во всех точках  $(x, y)$ ,  $x \in (a, b)$ ,  $y \in (c, d)$ . Пусть  $x_0 \in (a, b)$  и  $y_0 \in (c, d)$  и точка  $(x_0, y_0)$  является точкой локального экстремума (максимума или минимума) функции  $f$ . Если существуют частные производные  $f'_x(x_0, y_0)$  и  $f'_y(x_0, y_0)$ , то они обе равны нулю.

### Задача 5.1

Рассмотрим функцию  $f(x, y) = -x^2 - 4y^2 + 20xy$ .

- Найти все точки, в которых обе частные производные функции  $f$  обращаются в нуль.
- Построить сечения графика  $z = f(x, y)$  плоскостями  $x = 0$  и  $y = 0$ .
- Можно ли сделать вывод, что  $(0, 0)$  является точкой локального максимума функции  $f$ ?
- Построить сечение графика  $z = f(x, y)$  плоскостью  $x = y$ .
- Что вы теперь думаете насчёт максимума функции  $f$ ?

Чтобы не попасть в ловушку, продемонстрированную предыдущей задачей, можно использовать следующий приём. Пусть мы хотим найти глобальный максимум функции  $f(x, y)$ . Зафиксируем какое-то произвольное число  $y_0$  и рассмотрим функцию  $h_{y_0}(x) = f(x, y_0)$ . Это функция одной переменной. Пусть её глобальный максимум достигается в точке  $x^*$ . Поскольку функция  $h_{y_0}$  разная для разных  $y_0$ , то и  $x^*$  вообще говоря зависит от  $y_0$ . Так что мы будем писать  $x^*(y_0)$ . При некоторых  $y_0$  может быть несколько глобальных максимумов, выберем один из них (неважно, какой). Теперь для каждого  $y_0$  найдём наибольшее значение функции  $f$ , достигаемое в точках  $s$   $y = y_0$ . Оно равняется  $f(x^*(y_0), y_0)$ . Обозначим эту штуку через  $g(y_0)$  — это функция одной переменной  $y_0$ . Найдём её глобальный максимум, пусть он находится в точке  $y^*$ . Тогда глобальный максимум функции  $f$  достигается в точке  $(x^*(y^*), y^*)$ .

### Задача 5.2

С помощью описанного выше метода найти максимум данной функции двух переменных, либо показать, что максимума нет.

- $f(x, y) = -x^2 + 2x - y^2 - 4y$ ;
- $f(x, y) = -x^2 + 2x - y^2 - 4y + xy$ .
- $f(x, y) = -x^2 + 6xy + 10x - 4y^2 - 20y - 20$ .

Аналогичный метод можно использовать для поиска экстремумов функций на подмножествах.

### Задача 5.3

Найти максимум функции на указанном множестве

- $f(x, y) = -x^2 + y$ ,  $x \in [-1, 2]$ ,  $y \in [-2, 1]$ ;
- $f(x, y) = -x^2 - 2xy$ ,  $x \in [-2, 2]$ ,  $y \in [-1, 1]$ ;
- (\*)  $f(x, y) = y^3 - 3xy$ ,  $x \in [-1, 1]$ ,  $y \in [-2, 2]$ .

Иногда бывает полезно с помощью необходимого условия экстремума доказать, что экстремум не достигается во внутренних точках интересующего нас множества, после чего исследовать граничные точки «вручную», выражая уравнение границы в виде  $y = y(x)$  или  $x = x(y)$  и подставляя результат в исходную функцию.

### Задача 5.4

Найти максимум функции  $f(x, y) = xy$  на множестве  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $x + 2y \leq 2$ .

### Задача 5.5

Найти максимум функции  $f(x, y) = x^2 + y^2$  на множестве  $x \geq -1$ ,  $y \geq 0$ ,  $x + 2y \leq 2$ .

### Задача 5.6

Найти максимум и минимум функции  $f(x, y) = x^2 - y^2$  на множестве  $|x| + |y| \leq 1$ .

### Задача 5.7

Найти максимум и минимум функции  $f(x, y) = x^2 - y^2$  на множестве  $\max(|x|, |y|) \leq 1$ .

### Задача 5.8 (+)

Рассмотрим функцию  $f(x, y) = -x^2 - 4y^2 + xy$ . Показать, что для всех значений параметра  $a$  сечение графика  $z = f(x, y)$  плоскостью  $y = ax$  является параболой с ветвями, направленными вниз и вершиной в нуле. Что вы можете сказать о максимуме функции  $f(x, y)$ ?

### Задача 5.9 (+)

Рассмотрим функцию  $f(x, y) = -x^2 - 4y^2 + \beta xy$ . Найти все значения параметра  $\beta$ , при которых функция  $f$  имеет максимум в точке  $(0, 0)$ . Подсказка: рассмотреть сечение графика  $z = f(x, y)$  плоскостью  $y = ax$ .

### Задача 5.10 (+)

Рассмотрим функцию  $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ . При каких значениях параметров  $a$ ,  $b$  и  $c$  эта функция имеет максимум в точке  $(0, 0)$ ?