4. Дискретная оптимизация. Функции нескольких переменных

Летняя экономическая школа «I Love Economics»
Курс: Элементы математического анализа
Преподаватель: Илья Щуров
Ассистенты: Р. Бахарев, Д. Гущин, А. Зотов, Н. Киселев, А. Медведева, Е. Савинова, Д. Табашникова, М. Хван
Дедлайн: 18 августа 2017 г.

Дискретная оптимизация

Некоторые задачи и формулировки основаны на материалах ЛЭШ-2014.

Иногда требуется найти наибольшее или наименьшее значение непрерывных функций, область определения которых — это не промежутки в множестве всех действительных чисел $\mathbf{R}$, а множество целых чисел $\mathbf{Z}$ (или — часто в экономике — множество целых неотрицательных чисел $\mathbf{Z}_+$). Например, количество потребляемого или производимого товара может измеряться только целыми неотрицательными числами.

Чтобы решать такие задачи, можно проигнорировать целочисленность и найти максимум функции так, как будто она определена на $\mathbf{R}$. Если окажется, что нужный экстремум — целый, то больше ничего делать не нужно: ведь если в какой-то точке функция принимает, скажем, наибольшее значение *среди всех чисел*, то она тем более принимает там наибольшее значение *среди целых чисел*.

Иногда, однако, это не так: максимальное (минимальное) значение не попадает в нужное множество. Тогда самое большое значение достигается в одной из двух целочисленных точек, соседних с одним из локальных максимумов (минимумов) — не обязательно ближайшего соседа и не обязательно самого высокого (низкого).

Задача 4.1

Найдите наибольшее значение функции $f(x) = -2x^2 + 20x + 10$ при $x \in \mathbf{Z}$.

Основано на материалах ЛЭШ-2014

Задача 4.2

Найдите наибольшее значение функции $f(x) = -50250x^2 + 120600x + 112632$ при $x \in \mathbf{Z}$.

Основано на материалах ЛЭШ-2014

Задача 4.3

Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = 4x^3 - 18x^2 - 165x$ при

а) $x \in \mathbf{Z}_+$; **б)** $x \in (-\infty, 8] \cap \mathbf{Z}$.

Функции нескольких переменных

Задача 4.4. Пункты под звёздочкой — дополнительные

Построить сечения плоскостями $x = const$ и $y = const$ графика $z = f(x,y)$ функции двух переменных $f(x,y)$. Построить линии уровня этого графика. Найти все точки максимумов и минимумов (локальных и глобальных).

а) $f(x,y) = x^2 + 1$;
б) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$;
в) $f(x,y) = x + y^2$;
г) $f(x,y) = 10xy$;
д) (*) $f(x,y) = 4y^2 - x^2$;
е) (*) $f(x,y) = x - 2y$;
ж) $f(x,y) = |x + y|$;
з) $f(x,y) = |x| + |y|$;
и) (*) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Определение 1. Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x,y)$. Зафиксируем некоторое число y_0 и рассмотрим функцию $g(x) = f(x,y_0)$. Это функция одной переменной x. Её производная $g'(x_0)$ в точке x_0 называется *частной производной* функции f по переменной x в точке (x_0, y_0). Обозначается $f'_x(x_0,y_0)$ или $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$. Аналогично можно зафиксировать некоторое число x_0 и рассмотреть функцию $h(y) = f(x_0,y)$. Её производная в точке y_0 называется *частной производной* функции f по переменной y в точке (x_0,y_0). Обозначается $f'_y(x_0,y_0)$ или $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$.

Задача 4.5. Пункты под звёздочкой — дополнительные

Найти частные производные по x и по y от всех функций из предыдущей задачи