3. Производная сложной функции. Экстремумы

Летняя экономическая школа «I Love Economics»
Курс: Элементы математического анализа
Преподаватель: Илья Щуров
Ассистенты: Р. Бахарев, Д. Гущин, А. Зотов, Н. Киселев, А. Медведева, Е. Савинова, Д. Табашникова, М. Хван
Дедлайн: 15 августа 2017 г.

Производная сложной функции

Теорема 1. *Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, а функция g дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда функция $h(x) = g(f(x))$ дифференцируема в точке x_0 и*

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Задача 3.1

Представьте функцию в виде $y = f(g(x))$ (то есть укажите функции $z = g(x)$ и $y = f(z)$), затем найдите производную с помощью правила дифференцирования сложной функции.

а) $y = (x^4 + 3x^2 - 2)^5$; **б)** $y = \sqrt{10x}$; **в)** $y = \sqrt{1-x}$.

Задача 3.2

Пусть функция g определена и дифференцируема при всех вещественных x и точка x_0 является единственным решением уравнения $g'(x) = 0$. Пусть f также определена и дифференцируема при всех вещественных x. Рассмотрим функцию $h(x) = f(g(x))$. Что вы можете сказать о решениях уравнения $h'(x) = 0$?

Экстремумы

Определение 1. Точка x_0 называется *(нестрогим) локальным максимумом* функции f, если существует такая окрестность U точки x_0, что $f(x_0) \geqslant f(x)$ для любого $x \in U$.

Определение 2. Точка x_0 называется *(нестрогим) локальным минимумом* функции f, если существует такая окрестность U точки x_0, что $f(x_0) \leqslant f(x)$ для любого $x \in U$.

Замечание 1. Локальный максимум может находиться на границе области определения функции. В этом случае соответствующее неравенство должно выполняться для всех точек x из пересечения окрестности U с областью определения функции f.

Задача 3.3

Функция f определена на отрезке $[-1, 2]$ и задаётся на нём формулой $f(x) = 2x - 3$. Найти все точки локального максимума и локального минимума.

Определение 3. Точка x_0 называется *глобальным максимумом* функции f на множестве X, если для всякого $x \in X$, $f(x_0) \geqslant f(x)$. Говорят также, что функция принимает *наибольшее значение* в точке x_0.

Определение 4. Точка x_0 называется *глобальным минимумом* функции f на множестве X, если для всякого $x \in X$, $f(x_0) \leqslant f(x)$. Говорят также, что функция принимает *наименьшее значение* в точке x_0.

Замечание 2. Если множество X не указано, подразумевается, что X — вся область определения функции f.

Задача 3.4. Пункты под звёздочкой — дополнительные

Функция $f(x)$ задана указанной формулой. Построить её график. Найти все точки локальных максимумов и локальных минимумов f, а также глобальные максимумы и глобальные минимумы, не вычисляя никаких производных (но пользуясь при необходимости свойствами квадратного трёхчлена).

а) $f(x) = |x|$
б) $f(x) = 1 - x^2$;
в) (*) $f(x) = 1 - (x-1)^2$;
г) (*) $f(x) = |1 - x^2|$;
д) $f(x) = |1 - (x-1)^2|$;

Задача 3.5. Пункты под звёздочкой — дополнительные

Найти глобальные максимумы и минимумы всех функций из предыдущей задачи на множестве $[-2, 2]$.

Задача 3.6

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x = 0, \\ x, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Существует ли у этой функции глобальный минимум? Глобальный максимум?

Задача 3.7

Существует ли глобальный максимум функции $f(x) = x^2 + 2x - 1$ на интервале $(-1, 2)$? А глобальный минимум?

Задача 3.8

Существует ли глобальный максимум у функции $f(x) = 1/x$ (на всей области определения)?

Теорема 2. *Пусть $g(y)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция. Тогда если функция $f(x)$ достигает максимума (минимума) в точке x_0, то и функция $h(x) = g(f(x))$ достигает максимума (минимума) в точке x_0.*

Задача 3.9

Найти точки глобального максимума и минимума функции $f(x) = 2(x^2 + 9x + 2)^7 + 100500$.

Материалы ЛЭШ-2014

Задача 3.10. Дополнительная

Найти точки глобального максимума и минимума функции $f(x) = 2(x^2 + 9x + 2)^2 + 100500$.

Материалы ЛЭШ-2014

Задача 3.11 **(†). Дополнительная**

Найдите точки локального и глобального максимума и минимума функции: $f(x) = |x-1| + |x-2| + \ldots + |x-1535|$.

Материалы ЛЭШ-2014

Производная и экстремумы

Теорема 3. *Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в точке x_0. Если f имеет в x_0 локальный максимум или минимум, то $f'(x_0) = 0$.*

Теорема 4. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема в каждой точке интервала (a,b). Тогда если для всех $x \in (a,b)$*

1. *$f'(x) > 0$, то функция f возрастает на отрезке $[a,b]$;*
2. *$f'(x) < 0$, то функция f убывает на отрезке $[a,b]$;*
3. *$f'(x) = 0$, то функция f постоянна на отрезке $[a,b]$.*

Нестрогое следствие. Если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с «+» на «−», то x_0 — точка максимума, а если с «−» на «+», то x_0 — точка минимума. Если знак не меняется, то экстремума нет.

Задача 3.12

Найдите интервалы монотонности и исследуйте на экстремумы (найдите локальные максимумы и минимумы, глобальные максимумы и минимумы) функции. Постройте эскиз графика функции.

а) $y = x^5$; **б)** $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$; **в)** $y = x + \frac{1}{x}$.

Задача 3.13

Функция прибыли задана следующим образом: $\pi(Q) = -Q^3 + 4Q^2 - 5Q - 4$. Найдите максимальное значение прибыли.

Материалы ЛЭШ-2014

Задача 3.14

Функция общих издержек задана следующим образом: $TC(Q) = Q^2 + 1$.

а) Найдите $AC(Q) = TC(Q)/Q$, $MC(Q) = TC'(Q)$, $\min AC(Q)$. Нарисуйте графики функций $AC(Q)$ и $MC(Q)$.

б) Убедитесь, что совпадение $\min AC(Q)$ и точки пересечения кривых $AC(Q)$ и $MC(Q)$ не случайно.

в) Докажите, что если предельные издержки фирмы возрастают, то в точке минимума средних издержек, если она существует, средние издержки равны предельным.

Основано на материалах ЛЭШ-2014

Задача 3.15. Пункты под звёздочкой — дополнительные

Найдите глобальные максимумы и минимумы функции на указанном отрезке или на всей области определения, если отрезок не указан

а) $y = x^3 - 3x, \quad [-3; 4]$;

б) $y = |x^3 - 3x|$;

в) (*) $y = (|x| - 2)^2, \quad [-1,1]$;

г) $y = \begin{cases} (x+2)^4, & -3 < x < 0, \\ -(x-2)^4, & 0 \leqslant x < 3. \end{cases}$

Задача 3.16. Дополнительная

При каких значениях параметра p функция $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + px + 1$ имеет хотя бы один локальный минимум?

Задача 3.17 **(†). Дополнительная**

(Условие Куна — Таккера)

а) Покажите, что если x^* — точка максимума непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ при условии $x \geqslant 0$, то в любом случае $f'(x^*) \leqslant 0$ и $x^* \cdot f'(x^*) = 0$.

б) Выведите аналогичное условие, если x^* — точка минимума функции $f(x)$ при условии $x \geqslant 0$.

Основано на материалах ЛЭШ-2014