

## 2. Производная

Летняя экономическая школа «I Love Economics»

Курс: Элементы математического анализа

Преподаватель: Илья Щуров

Ассистенты: Р. Бахарев, Д. Гуцин, А. Зотов, Н. Киселев,  
А. Медведева, Е. Савинова, Д. Табашникова, М. Хван

Дедлайн: 14 августа 2017 г.



Некоторые задачи основаны на Хованская и др., *MathINFO: материалы по математике* и Stewart, *Calculus*.

**Определение 1.** Функция называется *непрерывной* в точке  $a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Функция называется *разрывной* в точке  $a$ , если она не является непрерывной в этой точке. Функция называется *непрерывной на отрезке*, если она непрерывна в каждой точке отрезка.

### Задача 2.1. Дополнительная

Магазин делает скидку в 20% на любую покупку стоимостью свыше 1000 рублей и скидку 30% на любую покупку стоимостью выше 2000 рублей. (Скидки не суммируются.) Пусть  $f(x)$  — это сумма, которую вы заплатите за покупку, стоимость которой без учёта скидки равна  $x$  рублей.

- Построить график  $y = f(x)$ .
- Указать промежутки непрерывности функции  $f$  и найти все точки разрыва.
- Найти предел справа и предел слева в каждой точке разрыва, если они существуют.

### Задача 2.2

Рассмотрим функцию, зависящую от параметра  $a$ .

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 2; \\ 2x + a, & x \geq 2. \end{cases}$$

При каких значениях  $a$  функция является непрерывной во всех точках?

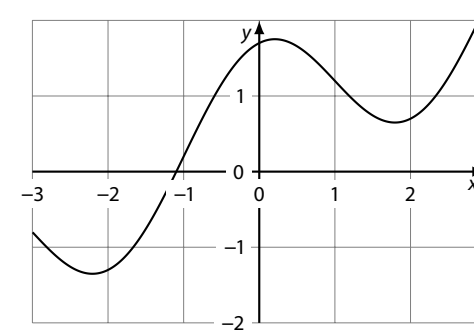
**Определение 2.** Производной функции  $f$  в точке  $x$  называется предел

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Часто числитель дроби под знаком предела обозначают условно через  $\Delta f$ . Производная показывает мгновенную скорость возрастания функции  $f$  в точке  $x$  и равна угловому коэффициенту касательной к графику в этой точке. Если у функции существует производная в точке  $x$ , то функция называется *дифференцируемой* в точке  $x$ .

### Задача 2.3

Рассмотрим функцию  $y = f(x)$ , график которой приведен на картинке.

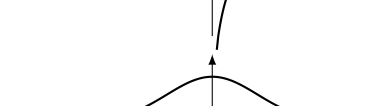
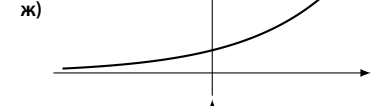
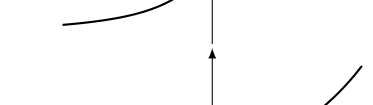
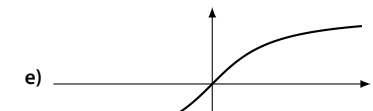
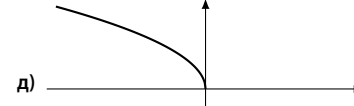
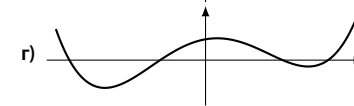
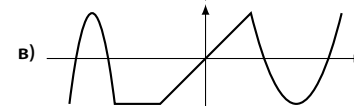
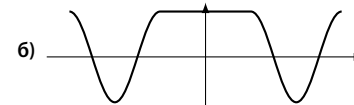
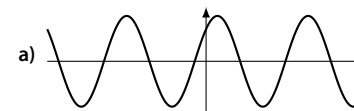


- Построить примерно касательные к графику  $y = f(x)$  в точках  $x = -2, -1, 0, 1, 2$ .
- Найти примерно их угловые коэффициенты.
- Построить эскиз графика производной  $y = f'(x)$ .

Основано на материалах Хованская и др., *MathINFO: материалы по математике*

### Задача 2.4

Для каждого из графиков функций постройте эскиз графика производной этой функции.



Основано на материалах Хованская и др., *MathINFO: материалы по математике*, картинки нарисованы Ю. Г. Кудряшовым

**Задача 2.5. Пункт под звёздочкой — дополнительный**

Пользуясь определением найти производные следующих функций

- а)  $f(x) = 4$ ,                      в)  $h(x) = x^3$ ,                      д)  $u(t) = 1/t$ ,  
 б)  $g(z) = 3z + 2$ ,                      г)  $K(s) = \sqrt{s}$ ,                      е) (\*)  $w(x) = x^n, n \in \mathbf{N}$ .

**Теорема 1** (Арифметика производных). Если у функций  $f$  и  $g$  существуют производные в точке  $x$ , а  $c$  — некоторая константа, то

1.  $c' = 0$ ,
2.  $(x^n)' = nx^{n-1}$ ,
3.  $(cf(x))' = cf'(x)$ ,
4.  $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ ,
5.  $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ ;
6.  $(f(x)/g(x))' = (f'(x)g(x) - g'(x)f(x))/g^2(x)$ .

**Задача 2.6**

Старик Хоттабыч наладил массовый выпуск ковров-самолетов фиксированной ширины и произвольной длины. Он продает их по цене  $p$  рублей за погонный метр. При этом количество  $q$  погонных метров, проданных за день, зависит от цены. (Чем дороже продает, тем хуже покупают.) Пусть эта зависимость выражается функцией  $q = f(p)$ .

- а) Что означает, что  $f(20) = 100$  и  $f'(20) = -15$ ? Если цена за метр увеличится на 1 рубль, как примерно изменится число проданных метров?
- б) Пусть общая выручка от продажи ковров-самолетов за день при установленной цене  $p$  составляет  $R(p)$ . Как выразить  $R(p)$  с помощью  $f(p)$ ?
- в) Вычислить  $R'(20)$  в условиях пункта а) с помощью подходящего правила арифметики производных. Какой смысл имеет это число?

**Задача 2.7**

Пользуясь арифметикой производных и задачей 2.5 г) найти производные функций

- а)  $\frac{2x+1}{3x-1}'$     б)  $\sqrt{x}(x+x^2)'$ ,

Основано на книге Stewart, *Calculus*

**Задача 2.8**

Пользуясь определениями доказать, что если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке. (Подсказка: умножить дробь в определении производной на  $\Delta x$ .)

**Задача 2.9. Пункты под звёздочкой — дополнительные**

Пользуясь определением установить, существует ли производная функции  $f(x)$  в точке  $x = 0$ , если

- а)  $f(x) = |x^3|$ ,    г) (\*)  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$   
 б)  $f(x) = |x| + x$ ,  
 в) (\*)  $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$     д) (\*)  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

**Задача 2.10 (+). Дополнительная**

Функцией Дирихле называется следующая функция:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ — рациональное,} \\ 0, & x \text{ — иррациональное.} \end{cases}$$

Доказать, что функция Дирихле разрывна в каждой точке.

**Задача 2.11 (+). Дополнительная**

Функцией Римана называется следующая функция:

$$f(x) = \begin{cases} 1/q, & x \text{ — рациональное число, представимое в виде несократимой дроби } p/q, \\ 0, & x \text{ — иррациональное.} \end{cases}$$

Доказать, что функция Римана разрывна в каждой рациональной точке и непрерывна в каждой иррациональной.

**Задача 2.12 (+). Дополнительная**

Доказать либо опровергнуть следующее утверждение: если функция  $f$  дифференцируема в точке  $x = a$  и имеет в ней положительную производную, то существует такая окрестность точки, что функция  $f$  монотонно возрастает на всей этой окрестности

**Список литературы**

Stewart, James. *Calculus*. Thomson, 2008.  
 Хованская, И. А., К. С. Сонин, И. В. Щуров и Ю. Г. Кудряшов. *MathINFO: материалы по математике*. <http://math-info.hse.ru>. 2010–2015.