S006. На каждый Новый год, а именно, 1 января в 0 часов 0 минут мачеха дарит Золушке три мороженки и некоторое количество медных монеток. Как минимум, одну мороженку Золушка должна съесть тотчас. Не съеденные тотчас мороженки она может положить на хранение в холодильник. Каждая из них может быть съедена в 0 часов 0 минут любых суток текущего года. За одни сутки хранения одной мороженки в холодильнике Золушка должна платить мачехе одну монетку (а если одновременно хранятся две мороженки, надо платить 2 монетки в сутки). Количество монеток, полученное Золушкой, достаточно для оплаты хранения двух мороженок в течение года и даже немного более. Мороженка может храниться в холодильнике только целое число суток. После извлечения мороженки из холодильника Золушка обязана немедленно съесть ее. Будем считать, что в году ровно 365 суток.

Функция полезности Золушки: $U = X - 0{,}01Y^2$, где X – сумма денег, которая осталась у Золушки к концу года после оплаты хранения мороженок, Y – максимальный интервал времени (в сутках) в течение года между моментами употребления мороженок.

Сколько суток Золушка будет хранить в холодильнике вторую мороженку и сколько суток – третью?

Решение

Предположим, сумма денег, полученная Золушкой, равна M. Очевидно, возможны три сценария поведения Золушки: 1) Все три мороженки съедаются 1 января; 2) 1 января съедаются две мороженки, а 3-я мороженка – в течение года; 3) 2-я и 3-я мороженки съедаются в течение года. Рассмотрим по очереди эти сценарии.

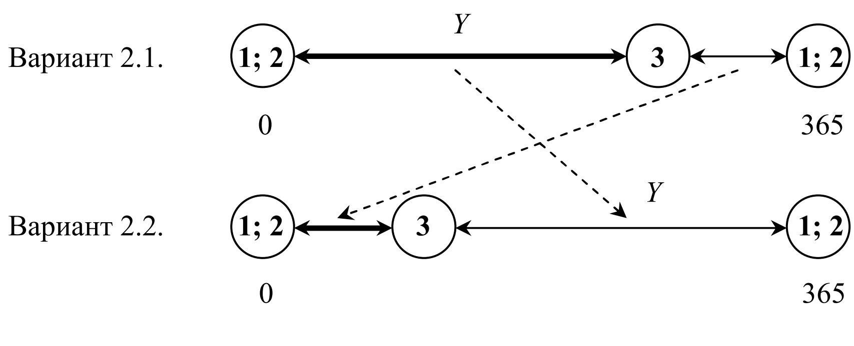
Сценарий 1. Все три мороженки съедаются 1 января

После того как съедены все мороженки, Золушки ждет 365 суток до следующего Нового года. $U = M - 0{,}01 \times 365^2 = M - 1332{,}25$.

Сценарий 2. 1 января съедаются две мороженки, а 3-я мороженка – в течение года

Этот сценарий иллюстрирует приведенная ниже схема. Первый кружок на оси времени показывает момент 0 (0 часов 0 минут 1 января), последний кружок – окончание 365-х суток (или 0 часов 0 минут 1 января следующего года, когда Золушка вновь получает три мороженки). Цифры в кружках – это номера съедаемых мороженок. Жирная стрелка обозначает интервал времени, в течение которого Золушка оплачивает хранение одной мороженки.

Предположим, первоначально Золушка по какой-то причине выбрала Вариант 2.1., при котором самый длинный интервал (между 2-й и 3-й мороженками) находится в начале года. Очевидно, более предпочтительным является Вариант 2.2. При выборе этого варианта величина $0{,}01Y^2$ остается той же самой, а величина X оказывается большей (так как расходы на хранение уменьшаются).



Это значит, что при выборе Сценария 2 самый длинный интервал будет находиться в конце года. Т. е. $182 < Y < 365$ (не забывайте, что по смыслу задачи Y – целое).

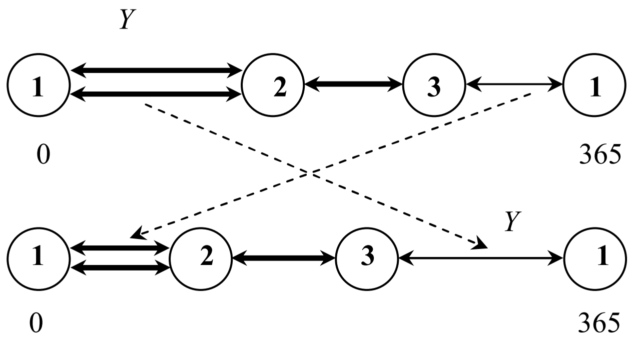
$U = [M - (365 - Y)] - 0{,}01Y^2 = -0{,}01Y^2 + Y + (M - 365)$. $U' = 1 - 0{,}02Y = 0$.
Абсолютный максимум функции полезности достигается при $Y = 50$. А на интервале возможных значений $(182 < Y < 365)$ максимальная полезность обеспечивается при $Y = 183$. $U = [M - (365 - 183)] - 0{,}01 \times 183^2 = M - 516{,}89$.

Сценарий 3. 2-я и 3-я мороженки съедаются в течение года

Приведенная ниже схема аналогична предыдущей. Двойная жирная стрелка означает интервал времени, в течение которого оплачивается хранение двух мороженок. Предположим опять-таки, что Золушка выбрала самый длинный интервал в начале года (Вариант 3.1.1.). По причинам, рассмотренным выше, Вариант 3.1.2. будет более предпочтительным.

Вариант 3.1.1.

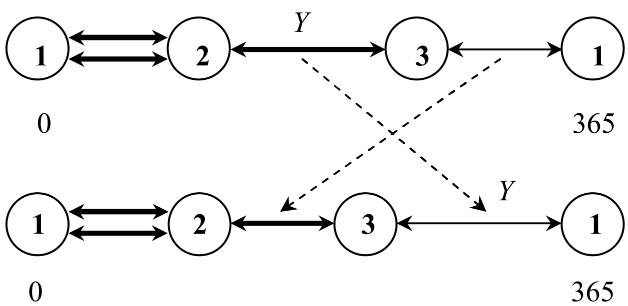
Вариант 3.1.2.



Точно так же Вариант 3.2.2 более выгоден для Золушки, нежели Вариант 3.2.1.

Вариант 3.2.1.

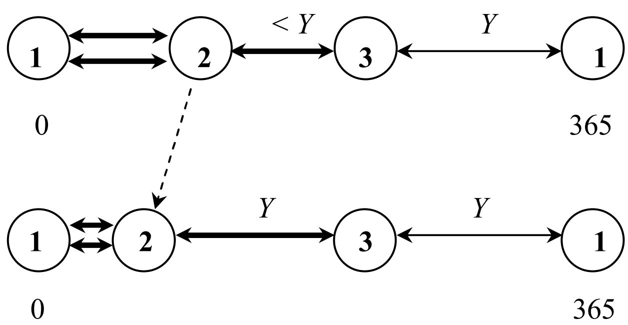
Вариант 3.2.2.



Таким образом, при выборе Сценария 3 самый длинный интервал также находится в конце года. Это будет интервал между 3-й мороженкой текущего года и 1-й мороженкой следующего года. Осталось определить, каким будет интервал между 2-й и 3-й мороженками текущего года. Предположим, этот интервал меньше Y (Вариант 3.3.1.). Очевидно, увеличив его до размера Y, мы можем сократить общие расходы на хранение мороженок в холодильнике. Но больше, чем Y, этот интервал быть не может. Если он станет большим, чем Y, мы возвращаемся к Варианту 3.2.1., когда самый большой интервал был между 2-й и 3-й мороженками. А этот вариант, как мы выяснили, не является оптимальным.

Вариант 3.3.1.

Вариант 3.3.2.



Следовательно, при выборе Сценария 3 наилучшим является Вариант 3.3.2.
$U = [M - (365 - 2Y) - (365 - Y)] - 0{,}01Y^2 = M - 730 + 3Y - 0{,}01Y^2$. $U' = 3 - 0{,}02Y = 0$.
$Y = 150$. $U = M - 730 + 3Y - 0{,}01Y^2 = M - 505$.

Сравнивая сценарии, мы обнаруживаем, что максимум функции полезности достигается при выборе Сценария 3. Т. е. 2-я мороженка хранится $365 - 2\times 150 = 65$ суток. Третья мороженка хранится $365 - 150 = 215$ суток.

Ответ. Вторая мороженка хранится 65 суток, третья – 215 суток.

S007. Веймарская республика. Гиперинфляция. Отставной фельдфебель Ганс ранним утром приехал в пивную на своей инвалидной коляске, имея при себе 5032 миллиарда марок. В тот момент, когда он приехал, кружка баварского пива стоила 100 миллиардов марок, а сосиска с кислой капустой – 60 миллиардов марок. Гансу было известно, что через каждый час сосиска будет дорожать на 2 миллиарда марок. Кроме того, он знал, на какую величину будет возрастать каждый час цена кружки пива, но, к сожалению, нам эта величина неизвестна. В связи с дефицитом продуктов посетитель может заказать не более одной кружки пива в час. То же относится к сосискам с кислой капустой. Правда, сидеть в пивной можно неограниченно долго, поскольку она работает круглосуточно.

Функция полезности Ганса имеет вид: $U = XY$, где X – число выпитых кружек пива, Y – число съеденных сосисок. Фельдфебель Ганс сидел в пивной до тех пор, пока не потратил все свои деньги. Известно, что, максимизируя свою функцию полезности, Ганс выпил 20 кружек пива. Если так, то сколько он съел сосисок с кислой капустой?

Решение

Предельная полезность X-й кружки пива: $MU_X = \dfrac{\partial U}{\partial X} = Y$. То же для Y-й сосиски: $MU_Y = \dfrac{\partial U}{\partial Y} = X$. Поскольку цены благ возрастают так, что цена $(i + 1)$-й единицы блага всегда больше цены i-й единицы, можно принять следующий критерий оптимума: $\dfrac{MU_X}{P_X} = \dfrac{MU_Y}{P_Y}$, где P_X, P_Y – цены последних приобретенных единиц того и другого блага.

Цена X-й кружки пива: $P_X = 100 + \varphi(X - 1)$, где φ – величина, на которую каждый час дорожает кружка пива. Цена Y-й сосиски: $P_Y = 60 + 2(Y - 1)$.

Условие оптимума: $\dfrac{Y}{100 + \varphi(X-1)} = \dfrac{X}{60 + 2(Y-1)}$. $Y[60 + 2(Y - 1)] = X[100 + \varphi(X - 1)]$.

По формуле суммы членов арифметической прогрессии можно составить следующее бюджетное ограничение: $5032 = \dfrac{100 + 100 + \varphi(X-1)}{2}X + \dfrac{60 + 60 + 2(Y-1)}{2}Y$.

$$5032 = \frac{100X + X[100 + \varphi(X-1)]}{2} + \frac{60 + 60 + 2(Y-1)}{2}Y.$$

Используя условие оптимума, заменяем в этом выражении $X[100 + \varphi(X - 1)]$ на $Y[60 + 2(Y - 1)]$.

$$5032 = \frac{100X + Y[60 + 2(Y-1)]}{2} + \frac{60 + 60 + 2(Y-1)}{2}Y.$$

Учитывая, что при оптимуме $X = 20$, получаем следующее уравнение:
$Y^2 + 44Y - 2016 = 0$. $Y = 28$.

Ответ: 28 сосисок с кислой капустой.

S008. Жители одной китайской провинции очень любят фейерверки, поэтому устраивают их по любому поводу. Для устройства фейерверка необходим хотя бы один комплект ракет (который, естественно, используется только один раз), а также специальная ракетная установка. Будем считать, что ракетная установка служит один год. Руководство провинции решило ввести потоварные налоги: t_1 для производителей ракетных установок и t_2 для производителей ракет.

Функции спроса и предложения на рынке ракетных установок (в расчете на год) до введения налогов имеют вид: $Q_d = 44 - P$, $Q_s = P$.

Функции спроса и предложения на рынке комплектов ракет (в расчете на год) до введения налогов: $q_d = 10Q - 8p$, где Q – объем продаж на рынке ракетных установок (вполне естественно, что объем спроса на ракеты зависит от объема спроса на ракетные установки); $q_s = 2p$.

При каких значениях t_1 и t_2 будет получена максимальная сумма налоговых поступлений на двух рынках, вместе взятых?

Решение

Условие равновесия на рынке ракетных установок после введения налога:
$44 - P = P - t_1$. $P = 22 + 0{,}5t_1$. $Q = 44 - P = 44 - 22 - 0{,}5t_1 = 22 - 0{,}5t_1$.

Общая сумма налоговых поступлений на рынке ракетных установок:
$T_1 = Q\,t_1 = 22t_1 - 0{,}5t_1^2$.

Функция спроса на рынке ракет (с учетом того, что равновесный объем на рынке ракетных установок после введения налога равен: $Q = 22 - 0{,}5t_1$):
$q_d = 10Q - 8p = 10(22 - 0{,}5t_1) - 8p = 220 - 5t_1 - 8p$.

Условие равновесия на рынке ракет после введения налога на производителей ракет:
$220 - 5t_1 - 8p = 2(p - t_2)$. $p = 22 - 0{,}5t_1 + 0{,}2t_2$.
$q = 220 - 5t_1 - 8(22 - 0{,}5t_1 + 0{,}2t_2) = 44 - t_1 - 1{,}6\,t_2$.

Общая сумма налоговых поступлений на рынке ракет: $T_2 = q\,t_2 = 44\,t_2 - t_1 t_2 - 1{,}6\,t_2^2$.

Общая сумма налоговых поступлений на двух рынках, вместе взятых: $T = T_1 + T_2 =$
$= 22t_1 - 0{,}5t_1^2 + 44t_2 - t_1 t_2 - 1{,}6\,t_2^2$. Максимум T достигается при условии:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t_1} = 22 - t_1 - t_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 22 - t_2 \\ \dfrac{\partial T}{\partial t_2} = 44 - t_1 - 3{,}2\,t_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 44 - (22 - t_2) - 3{,}2\,t_2 = 0 \end{cases}$$

$22 - 2{,}2t_2 = 0$. $t_2 = 10$. $t_1 = 22 - t_2 = 12$.

Ответ. $t_1 = 12$, $t_2 = 10$.

S009. На рынке присутствуют два покупателя, имеющие функции спроса: $Q_{d1} = a_1 - P$ и $Q_{d2} = a_2 - P$ $(a_2 > a_1)$. Если продавец установит разные цены на товар для того и другого покупателя, то максимальная выручка, которую он сможет получить на данном рынке, будет равна 164. Если он установит одинаковую цену для того и другого, то его максимальная выручка будет равна 162. Определите a_1 и a_2.

Решение

Ситуация I. Продавец устанавливает разные цены. Выручка от первого покупателя:
$R_1 = P_1 Q_1 = (a_1 - Q_1)Q_1 = a_1 Q_1 - Q_1^2$. $R_1' = a_1 - 2Q_1 = 0$. $Q_1 = 0{,}5a_1$.
$R_1 = 0{,}5a_1^2 - 0{,}25a_1^2 = 0{,}25a_1^2$. Аналогично $R_2 = 0{,}25a_2^2$.
По условию $R_1 + R_2 = 0{,}25a_1^2 + 0{,}25a_2^2 = 164$.

Отсюда $a_1^2 + a_2^2 = 656$ **(1)**.

Ситуация 2. Цена одна и та же (P). Выручка от первого покупателя:
$R_1 = P\,Q_1 = P\,(a_1 - P)$. Выручка от второго покупателя: $R_2 = P\,Q_2 = P\,(a_2 - P)$.
Общая выручка $R = P\,(a_1 - P) + P\,(a_2 - P) = a_1 P + a_2 P - 2P^2 = P\,(a_1 + a_2 - 2P)$ **(2)**.

Обратите внимание! Мы знаем, что во второй ситуации максимальная выручка равна 162. Но это число еще нельзя подставлять в уравнение **(2)**. Максимальное значение выручки мы можем использовать только тогда, когда получим выражение, связывающие оптимальные значения переменных. В данном случае это такое значение P, при котором достигается R_{max}.

А R_{max} достигается при условии: $R' = a_1 + a_2 - 4P = 0$. $P = 0{,}25(a_1 + a_2)$.

$R = P\,(a_1 + a_2 - 2P) = 0{,}25(a_1 + a_2)(a_1 + a_2 - 0{,}5a_1 - 0{,}5a_2) = 0{,}125(a_1 + a_2)^2$.

А вот это выражение для выручки мы уже можем приравнять к заданному максимуму (162), поскольку оно уже содержит оптимальное значение P (при котором данный максимум и достигается).

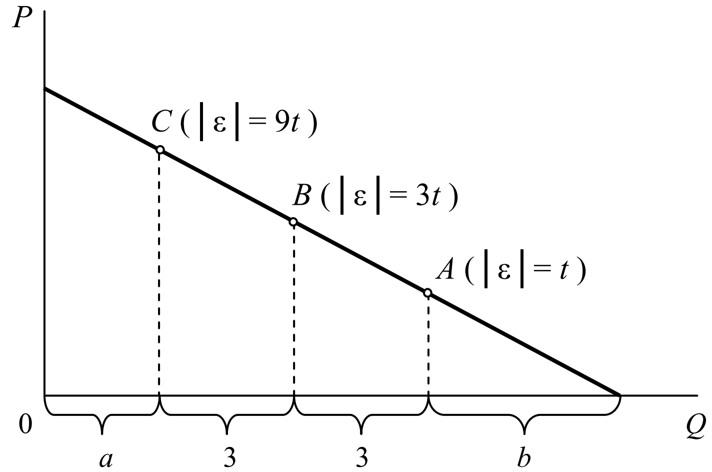
$0{,}125(a_1 + a_2)^2 = 162$. $(a_1 + a_2)^2 = 1296$. $a_1 + a_2 = 36$. $a_2 = 36 - a_1$. Подставим это значение в уравнение **(1)**: $a_1^2 + (36 - a_1)^2 = 656$. $a_1^2 - 36\,a_1 + 320 = 0$. Получаем два значения a_1: 20 и 16. Соответствующие значения a_2: 16 и 20. По условию $a_2 > a_1$. Поэтому $a_1 = 16$, $a_2 = 20$.

Ответ. $a_1 = 16$, $a_2 = 20$.

S010. Во время проведения маркетингового исследования на рынке товара X эксперт Y обнаружил, что функция спроса на товар X является линейной. Кроме того, был обнаружен еще один факт: если взять за точку отсчета одно определенное значение объема спроса, то при уменьшении этого объема на 3 единицы эластичность спроса по абсолютной величине ($|\varepsilon|$) возрастает в три раза. А если уменьшить объем спроса *еще* на три единицы, то эластичность спроса по абсолютной величине вырастет *еще* в три раза. Помогите эксперту определить, какой максимальный объем товара может быть продан на данном рынке.

Решение

Обозначим значения эластичности по абсолютной величине для трех упомянутых в условии значений объема спроса как t, $3t$, $9t$.



Пользуясь геометрическим методом определения эластичности, мы можем записать следующие равенства:

$$\begin{cases} b : (a + 3 + 3) = t & \textbf{(1)} \\ (3 + b) : (a + 3) = 3t & \textbf{(2)} \\ (3 + 3 + b) : a = 9t & \textbf{(3)} \end{cases}$$

Разделив **(2)** на **(1)**, получим: $[(b + 3)\,(a + 6)] : [(a + 3)b] = 3$.

$ab + 6b + 3a + 18 = 3ab + 9b$. $3a - 3b - 2ab + 18 = 0$ **(4)**.

Разделив **(3)** на **(1)**, получим: $[(a + 6)\,(b + 6)] : (ab) = 9$.

$ab + 6a + 6b + 36 = 9ab$. $6a + 6b + 36 - 8ab = 0$. $3a + 3b - 4ab + 18 = 0$ **(5)**.

Вычитая **(4)** из **(5)**, получаем: $6b - 2ab = 0$. $a = 3$. Подставив это значение a в **(4)** или **(5)**, найдем, что $b = 3$.

Максимальный объем товара будет равен: $a + 3 + 3 + b = 12$.

Ответ: 12.