S031. Функции спроса и предложения имеют вид: $Q_d = a - P$; $Q_s = P - b$. Государство может ввести для потребителей либо потоварный налог в размере t_1 денежных единиц, либо налог в процентах от цены товара в размере t_2. Известно, что при увеличении ставок налогов до $t_1 = 4$ (если введен потоварный налог) и $t_2 = 20\%$ (если введен налог в процентах от цены) общая сумма налоговых поступлений становится равной нулю.

Сформулируйте уравнения функций спроса и предложения.

Решение

После введения потоварного налога функция спроса имеет вид: $Q_{d1} = a - (P + t_1)$.
$Q_{d1} = Q_s$. $a - (P + t_1) = P - b$. $P = 0{,}5(a + b - t_1)$. $Q = P - b = 0{,}5(a - b - t_1)$. Общая сумма налоговых поступлений: $T_1 = t_1 Q = 0{,}5\, t_1 (a - b - t_1) = 0{,}5 \times 4 \times (a - b - 4) = 0$.
$a = b + 4$.

Если введен налог в процентах от цены, то функция спроса принимает вид:

$$Q_{d1} = a - \left(P + \frac{t_2}{100}P\right). \quad Q_{d1} = Q_s. \quad a - \left(P + \frac{t_2}{100}P\right) = P - b. \quad P = \frac{a+b}{2 + 0{,}01\, t_2}.$$

$$Q = P - b = \frac{a+b}{2 + 0{,}01\, t_2} - b.$$

Общие расходы потребителей: $PQ = \dfrac{a+b}{2 + 0{,}01\, t_2}\left(\dfrac{a+b}{2 + 0{,}01\, t_2} - b\right)$

Общая сумма налоговых поступлений: $T_2 = PQ\dfrac{t_2}{100} = \dfrac{a+b}{2 + 0{,}01\, t_2}\left(\dfrac{a+b}{2 + 0{,}01\, t_2} - b\right)\dfrac{t_2}{100} = 0.$

$\dfrac{a+b}{2 + 0{,}01\, t_2} - b = 0.$ $(a + b) : 2{,}2 = b.$ $2b + 4 = 2{,}2b.$ $b = 20.$ $a = 24.$

Ответ: $Q_d = 24 - P$; $Q_s = P - 20$.

S032. Население одной бедной страны питается одним только картофельно-луковым супом. Картофель и лук люди могут купить только в одной из двух торговых систем, которые продают указанные продукты в виде следующих суповых наборов:

1) набор из 1 картофелины и 2 луковиц (цена набора 20 денежных единиц);
2) набор из 4 картофелин и 1 луковицы (цена набора 30 денежных единиц).

Функция полезности каждого жителя имеет вид: $U = XY$, где X – число картофелин, Y – число луковиц. Месячный доход каждого жителя составляет 800 денежных единиц. Весь он расходуется на приобретение картофеля и лука. Сколько картофелин и луковиц ежемесячно съедает каждый житель, максимизируя свою функцию полезности?

Решение

Пусть a – число наборов типа a, b – число наборов типа b.
Бюджет $I = 20a + 30b = 800$. $a = 40 - 1{,}5b$. $X = a + 4b = 40 - 1{,}5b + 4b = 40 + 2{,}5b$.
$Y = 2a + b = 80 - 3b + b = 80 - 2b$. $U = XY = (40 + 2{,}5b)(80 - 2b) = -5b^2 + 120b + 3200$.
$U' = -10b + 120 = 0$. $b = 12$. $a = 22$. $X = a + 4b = 70$. $Y = 2a + b = 56$.

Ответ. 70 картофелин и 56 луковиц.

S033. Карта кривых безразличия одного индивида представляет собой бесконечное множество кривых вида: $Y = 0{,}05X^2 - 6X + U$, где X – объем блага X ($0 < X < 50$), Y – объем блага Y ($Y > 0$), U – общая полезность наборов благ X и Y, обозначаемых данной кривой безразличия. Известно, что первоначально, максимизируя полезность, индивид приобретал на свой бюджет 60 единиц блага Y и некоторое количество блага X.

Когда бюджет индивида увеличился в 2 раза, он смог приобретать набор благ, общая полезность которого на 87,5% больше первоначальной. Сколько единиц блага X и сколько единиц блага Y приобретает индивид после того, как увеличился его бюджет?

Решение

Производная Y'_X численно равна тангенсу угла наклона бюджетной линии в точке касания. В данной задаче для всех кривых безразличия эта производная будет иметь один и тот же вид: $Y'_X = 0{,}1X - 6$ (Поскольку U – постоянная величина для каждой данной кривой безразличия). Так как цены товаров не изменяются, все бюджетные линии будут иметь один и тот же тангенс угла наклона, равный $\left(-\dfrac{P_X}{P_Y}\right)$. Это значит, что для всех кривых безразличия в соответствующих им точках оптимума численные значения производных будут одинаковыми. Если первоначальное значение X равно X_1, а новое значение (после увеличения бюджета) равно X_2, то

$$0{,}1X_1 - 6 = 0{,}1X_2 - 6 = -\frac{P_X}{P_Y} \quad \textbf{(1)}. \qquad \text{Кстати, отсюда } X_1 = X_2.$$

Пусть цены товаров X и Y равны P_X и P_Y. Тогда первоначальный бюджет можно выразить как $I_1 = P_X X_1 + P_Y Y_1 = P_X X_1 + P_Y 60$.

Новый бюджет: $I_2 = P_X X_2 + P_Y Y_2 = P_X X_1 + P_Y Y_2$.

Из условия задачи следует, что $I_2 = 2I_1$. То есть $P_X X_1 + P_Y Y_2 = 2(P_X X_1 + P_Y 60)$. Разделив обе части этого уравнения на ($-P_Y$) и затем используя равенство **(1)**, получим:

$$\left(-\frac{P_X}{P_Y}\right)X_1 - Y_2 = 2\left(-\frac{P_X}{P_Y}\right)X_1 - 120. \qquad Y_2 = 120 - \left(-\frac{P_X}{P_Y}\right)X_1 = 120 - (0{,}1X_1 - 6)\,X_1.$$

$Y_2 = -0{,}1X_1^2 + 6X_1 + 120$ **(2)**.

Из уравнения кривой безразличия: $U = -0{,}05X^2 + 6X + Y$. Первоначальное значение функции полезности: $U_1 = -0{,}05X_1^{\,2} + 6X_1 + 60$. Новое значение функции полезности: $U_2 = -0{,}05X_2^{\,2} + 6X_2 + Y_2 = -0{,}05X_1^{\,2} + 6X_1 + Y_2$.

Из условия задачи следует, что $U_2 = 1{,}875U_1$.

То есть $-0{,}05X_1^{\,2} + 6X_1 + Y_2 = 1{,}875(-0{,}05X_1^{\,2} + 6X_1 + 60)$.

Отсюда $Y_2 = -0{,}04375X_1^2 + 5{,}25X_1 + 112{,}5$ **(3)**.

Используя **(2)** и **(3)**, можно записать равенство:

$-0{,}1X_1^2 + 6X_1 + 120 = -0{,}04375X_1^2 + 5{,}25X_1 + 112{,}5.$ $\qquad 0{,}05625X_1^2 - 0{,}75X_1 - 7{,}5 = 0.$

Единственный положительный (т.е. имеющий смысл) корень уравнения: $X_1 = 20$. Как мы уже доказали, объем потребления блага после увеличения бюджета будет таким же, т.е. $X_2 = 20$. Из уравнения **(2)** $Y_2 = -0{,}1 \times 20^2 + 6 \times 20 + 120 = 200$.

Ответ. После увеличения бюджета индивид потребляет 20 единиц X и 200 единиц Y.

S034. Предположим, на фондовом рынке продаются ценные бумаги только двух видов: A и B. В данный момент эти бумаги стоят одинаково – по 100 рублей каждая. При этом стоимость ценной бумаги типа A каждый месяц возрастает на 5 рублей по отношению к предыдущему месяцу; стоимость бумаги B каждый месяц возрастает на 0,5% к стоимости предыдущего месяца. Инвестор в любой момент может купить или продать любое конечное количество ценных бумаг A и B по текущей цене. Каких–либо иных приносящих доход активов и депозитов, куда бы могли вложить свои деньги инвесторы, не существует. Какие бумаги первоначально купит инвестор и на какой минимальный срок?

Решение

Очевидно, первоначально более выгодно приобретение бумаг типа A. Вместе с тем нетрудно заметить, что стоимость бумаги B прирастает на один и тот же процент, в то время как процент прироста стоимости A с каждым месяцем сокращается. Неизбежно наступит момент, когда 0,5% стоимости бумаги A будут равны 5 рублям. Это значит, что в течение следующего месяца прирост стоимости бумаги A будет таким же, как и у бумаги B. А в дальнейшем каждый месячный прирост стоимости бумаги B будет больше прироста стоимости A.

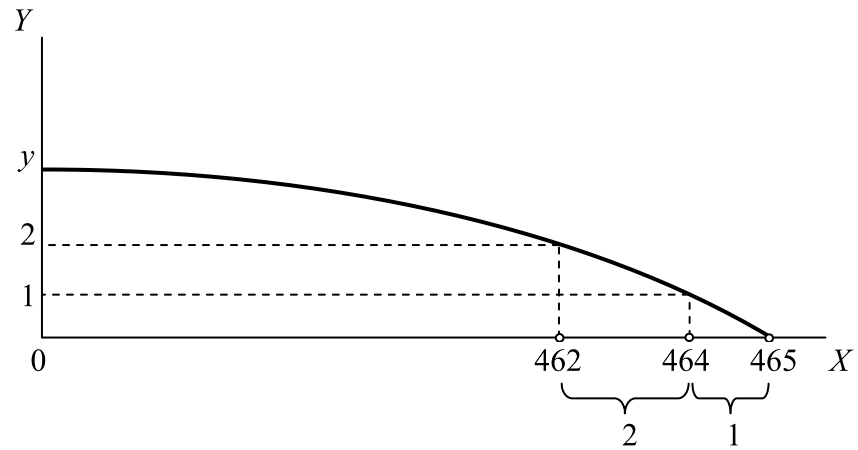
То есть в тот момент, когда 0,5% стоимости бумаги A становятся равными 5 рублям, заканчивается минимальное время, когда имеет смысл их хранить.

Если 0,5% стоимости бумаги A равны 5 рублям, то это значит, что ее полная стоимость равна 5 : 0,005 = 1000 руб. Первоначально бумага A стоила 100 рублей, т.е. прирост стоимости составил 900 руб. Число месяцев, в течение которых происходит этот прирост, равно: 900 : 5 = 180 (или 15 лет).

Ответ: на срок 15 лет инвестор купит бумаги A, затем продаст их и на вырученные деньги купит бумаги B.

S035. Одна страна может производить только два вида изделий – фугасы (Y) и контрабасы (X). Известно, что максимальное производство контрабасов может составить 465 штук (в том случае, если фугасы вообще не производятся). Для того чтобы произвести первый фугас, страна должна отказаться от выпуска одного контрабаса. Альтернативные издержки производства каждого последующего фугаса на единицу больше альтернативных издержек производства предыдущего. Какое максимальное количество фугасов может произвести страна (в случае, если контрабасы вообще не производятся?)

Решение



Предположим, мы начали строить КПВ из известной нам точки (465; 0). На первом шаге мы уменьшаем X на одну единицу и получаем прирост Y на одну единицу. На втором шаге, уменьшая X на 2 единицы, получаем снова прирост Y на одну единицу. И так далее – до тех пор, пока X не станет равным 0 (а Y при этом достигнет максимума, равного y). Очевидно, на этом пути по оси OX мы сделаем y шагов, каждый из которых на единицу больше предыдущего. Суммарная длина этих шагов будет равна 465.

По формуле суммы членов арифметической прогрессии:

$$\frac{1+y}{2}\cdot y = 465. \quad y^2 + y - 930 = 0. \; y_1 = 30, \; y_2 = -31 \text{ (не подходит по условию задачи).}$$

Ответ: 30 фугасов.