S026. В расчете на месяц гражданка N имеет следующую функцию полезности: $U = f(X, Y)$, где X – число пирожных-эклеров, Y – расходы на все остальные товары (в рублях). Предельная полезность (MU) эклеров подчиняется следующей закономерности:

MU первого эклера равна 100 единицам полезности,

MU второго эклера на 1 единицу меньше, чем MU первого,

MU третьего эклера на 2 единицы меньше, чем MU второго,

MU четвертого эклера на 3 единицы меньше, чем MU третьего.

И так далее.

MU первого рубля, потраченного на все остальные товары, равна 100 единицам полезности. MU второго рубля равна 99, MU третьего рубля равна 98, MU четвертого рубля равна 97. И так далее.

Месячный бюджет гражданки N составляет 640 рублей. Определите дуговую эластичность спроса гражданки N на эклеры на интервале цены $P_X \in [10; 18]$.

Решение

$MU_X = 100 - \dfrac{1+(X-1)}{2} \times (X-1) = -0{,}5X^2 + 0{,}5X + 100$. $MU_Y = 100 - (Y-1) = 101 - Y$.

$640 = P_X X + Y$. $Y = 640 - P_X X$. $MU_Y = 101 - Y = 101 - (640 - P_X X) = P_X X - 539$.

Условие оптимума: $\dfrac{MU_X}{P_X} = \dfrac{MU_Y}{P_Y}$. Очевидно, цена одной единицы товара Y (т.е. одного рубля) равна одному рублю. $\dfrac{-0{,}5X^2 + 0{,}5X + 100}{P_X} = \dfrac{P_X X - 539}{1}$.

При $P_1 = 10$ получаем уравнение: $-0{,}5X_1^2 - 99{,}5X_1 + 5490 = 0$. $X_1 = 45$ (второй корень получается отрицательным и не подходит по смыслу задачи).

При $P_2 = 18$: $-0{,}5X_2^2 - 323{,}5X_2 + 9802 = 0$. $X_2 = 29$ (второй корень также отрицателен).

Дуговая эластичность спроса:

$$\varepsilon = \frac{X_2 - X_1}{P_2 - P_1} \times \frac{P_1 + P_2}{X_1 + X_2} = \frac{29-45}{18-10} \times \frac{10+18}{45+29} = -\frac{28}{37}.$$

Ответ: $-\dfrac{28}{37}$.

S027. Половину трудоспособного населения одной страны составляют гедонисты (проще говоря, изнеженные лентяи), другую половину – трудоголики. Функция предложения труда гедонистов: $L_1 = -0{,}1w^2 + 24w - 900$; функция предложения труда трудоголиков: $L_2 = -0{,}1w^2 + 20w$ (L_1, L_2 – предложение труда в часах рабочего времени в течение месяца, w – почасовая ставка заработной платы). Ставка заработной платы устанавливается правительством на одном уровне для обеих групп населения, при этом выбирается такое значение w, которое обеспечивает ненулевое предложение труда как со стороны гедонистов, так и со стороны трудоголиков. Очевидно, месячный доход тех и других рассчитывается по формуле: $I = wL$.

Однажды правительство решило, что существующее значение коэффициента Джини ($^1/_6$), рассчитываемое на основе месячных доходов, слишком велико для их страны и постановило увеличить ставку зарплаты для всех категорий населения до такого уровня, который обеспечивает минимальное значение указанного коэффициента.

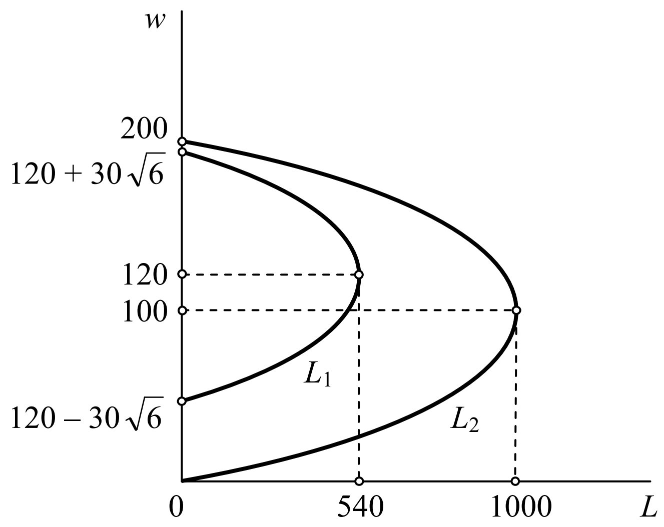
a) На сколько денежных единиц правительство увеличило ставку заработной платы?

b) Какое значение коэффициента Джини было при этом достигнуто?

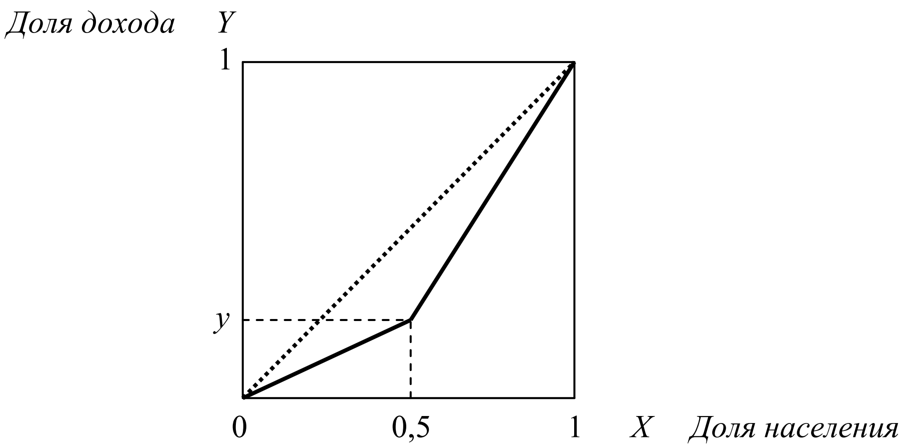
Решение

Легко доказать, что гедонисты предлагают труд при таких значениях заработной платы, которые находятся на интервале $w \in (120 - 30\sqrt{6}\,;\; 120 + 30\sqrt{6}\,)$. Аналогично для трудоголиков: $w \in (0;\, 200)$. $120 - 30\sqrt{6} > 0$. $120 + 30\sqrt{6} < 200$. То есть в соответствии с условием задачи ставка зарплаты, устанавливаемая правительством, находится на интервале $w \in (120 - 30\sqrt{6}\,;\; 120 + 30\sqrt{6}\,)$.

$L_2 - L_1 = (-\,0{,}1w^2 + 20w) - (-\,0{,}1w^2 + 24w - 900) = 900 - 4w$. При максимальном значении $w = 120 + 30\sqrt{6}$ мы имеем: $L_2 - L_1 = 900 - 4\times\,(120 + 30\sqrt{6}\,) = 420 - 120\sqrt{6} = \sqrt{176400} - \sqrt{86400} > 0$. Это означает, что месячный доход трудоголиков всегда будет выше месячного дохода гедонистов. Т.е. гедонисты при построении кривой Лоренца будут отнесены к группе «бедных». На приведенном ниже рисунке показано взаимное расположение графиков функций предложения труда гедонистов и трудоголиков.



Предположим, первоначально доля гедонистов в общем располагаемом доходе равна y. Тогда кривая Лоренца для рассматриваемой страны имеет следующий вид:



Коэффициент Джини $G = \dfrac{0{,}5 - \dfrac{0{,}5\,y}{2} - \dfrac{y+1}{2}\times 0{,}5}{0{,}5} = 0{,}5 - y$. По условию $G = 0{,}5 - y = \dfrac{1}{6}$. $y = \dfrac{1}{3}$. $L_1 = \dfrac{L_1 + L_2}{3}$. $2L_1 = L_2$. $2\times\,(-\,0{,}1w^2 + 24w - 900) = -\,0{,}1w^2 + 20w$.

$-0{,}1w^2 + 28w - 1800 = 0$. $w_1 = 100$, $w_2 = 180$. Пока мы не знаем, какой из этих корней удовлетворяет условиям задачи (т.е. показывает первоначальную ставку заработной платы). Поэтому примем к сведению оба. (*Внимание*: мы еще вернемся к этому месту в наших вычислениях).

Теперь определим, при каком значении w достигается минимальный на исследуемом интервале коэффициент Джини. Очевидно, этот минимум достигается тогда, когда минимальна относительная разница между L_1 и L_2. В данной задаче проще всего минимизировать следующее отношение: $\dfrac{L_2 - L_1}{L_2}$ (Разумеется, при условии, что $L_2 > L_1$).

$$\frac{L_2 - L_1}{L_2} = \frac{-4w + 900}{-0{,}1w^2 + 20w}. \qquad \left(\frac{L_2 - L_1}{L_2}\right)' = \frac{-4(-0{,}1w^2 + 20w) - (-4w + 900)(-0{,}2w + 20)}{(-0{,}1w^2 + 20w)^2} =$$

$$= \frac{-0{,}4w^2 + 180w - 18\,000}{(-0{,}1w^2 + 20w)^2} = 0.$$ $-0{,}4w^2 + 180w - 18000 = 0$. $w_1 = 150$, $w_2 = 300$ (этот корень не отвечает ранее сформулированному условию: $120 - 30\sqrt{6} < w < 120 + 30\sqrt{6}$).

Докажем, что при $w = 150$ действительно достигается минимум функции $\dfrac{L_2 - L_1}{L_2}$.

Для этого возьмем вторую производную функции и определим ее значение при $w = 150$.

$$\left(\frac{L_2 - L_1}{L_2}\right)'' =$$

$$= \frac{(-0{,}8w + 180)(-0{,}1w^2 + 20w)^2 - 2(-0{,}4w^2 + 180w - 18\,000)(-0{,}1w^2 + 20w)(-0{,}2w + 20)}{(-0{,}1w^2 + 20w)^4} =$$

$= +\dfrac{1}{9375}$. Вторая производная положительна. Это значит, что мы получили минимум.

Теперь вернемся к этапу решения, где мы получили два значения первоначальной ставки заработной платы: $w_1 = 100$, $w_2 = 180$. Сейчас мы выяснили, что минимальное значение коэффициента Джини достигается при $w = 150$. Из условия задачи нам известно, что правительство *повысило* ставку заработной платы. То есть начальным значением было $w = 100$. Таким образом, ставка заработной платы была увеличена на 50 денежных единиц.

При $w = 150$ $L_1 = 450$, $L_2 = 750$. Доля гедонистов («бедных») в общем доходе:

$y = \dfrac{450}{450 + 750} = 0{,}375$. $G = 0{,}5 - y = 0{,}125$.

Ответ. a) на 50; b) 0,125.

S028. В одной маленькой стране построен самый передовой общественный строй. Так, по крайней мере, утверждают ее руководители. К сожалению, в условиях самого передового общественного строя трудящие употребляют в пищу всего лишь два продукта – хлеб и картофель. То и другое распределяется по продовольственным карточкам. Каждый трудящийся получает в расчете на год 100 хлебных и 240 картофельных карточек. Каждая карточка дает право на получение одного килограмма соответствующего продукта. При этом половина трудящихся имеет функцию полезности $U_1 = XY$, а другая половина – $U_2 = X^3Y$ (здесь X – потребление хлеба в килограммах, Y – потребление картофеля в килограммах, то и другое в расчете на год). Как вы сами догадываетесь, различия в предпочтениях дают повод к стихийному обмену карточками.

Вопрос: сколько картофельных карточек дают за одну хлебную?

Решение

Рассмотрим обмен между двумя потребителями – «первым» и «вторым». Первый имеет функцию полезности U_1, второй – U_2. Предположим, в этом обмене существует равновесная цена хлебной карточки P_X, представляющая собой число картофельных карточек, которое обменивается на одну хлебную. Поскольку мы выражаем все цены в картофельных карточках, то, разумеется, цена картофельной карточки равна одной картофельной карточке. То есть $P_Y = 1$.

Предельная норма замещения картофеля хлебом для первого потребителя: $MRS_{XY} = \dfrac{MU_X}{MU_Y} = \dfrac{Y_1}{X_1}$. В тот момент, когда он получил 100 хлебных и 240 картофельных карточек, $MRS_{XY} = \dfrac{Y_1}{X_1} = \dfrac{240}{100} = 2{,}4$. То есть в начальный момент обмена первый потребитель при сохранении прежнего уровня полезности может поменять одну хлебную карточку на 2,4 картофельных. А если он поменяет на одну хлебную карточку *больше*, чем на 2,4 картофельных, то общая полезность его набора благ увеличится.

Предельная норма замещения картофеля хлебом для второго потребителя: $MRS_{XY} = \dfrac{MU_X}{MU_Y} = \dfrac{3X_2^2Y_2}{X_2^3} = \dfrac{3Y_2}{X_2}$. В момент получения карточек $MRS_{XY} = \dfrac{3Y_2}{X_2} = \dfrac{3\times 240}{100} = 7{,}2$. Это значит, что в данный момент при сохранении прежнего уровня полезности второй потребитель может поменять 7,2 картофельных карточки на одну хлебную. Если же он получит хлебную карточку в обмен на *меньшее* количество картофельных, то его общая полезность тоже увеличится.

Таким образом, существует такое значение $P_X \in (2{,}4;\ 7{,}2)$, при котором обмен выгоден для обоих потребителей. То есть первый потребитель отдаст второму некоторое количество (скажем, z) хлебных карточек, а второй потребитель отдаст первому картофельные карточки общим числом $P_X z$.

Оптимум первого и второго потребителей достигается при условии: $MRS_{XY} = \dfrac{P_X}{P_Y} = P_X$.

$$\frac{Y_1}{X_1} = \frac{3Y_2}{X_2} = P_X. \qquad \frac{240 + P_X z}{100 - z} = \frac{3(240 - P_X z)}{100 + z} = P_X.$$

$$\begin{cases} 240 + P_X z = P_X(100 - z) \\ 3(240 - P_X z) = P_X(100 + z) \end{cases} \qquad \begin{cases} 2P_X z - 100P_X + 240 = 0 \\ -4P_X z - 100P_X + 720 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4P_X z - 200P_X + 480 = 0 \\ -4P_X z - 100P_X + 720 = 0 \end{cases}$$

Складывая последние два уравнения, находим: $300P_X = 1200$. $P_X = 4$.

Ответ: 4.

S029. Однажды ученые-антропологи встретили в лесу питекантропа, который умел делать простые орудия труда – палки-копалки. Для изготовления одной палки-копалки ему требовался целый рабочий день. Будем считать, что палка-копалка выходила из строя в пределах того же месяца, в течение которого и была изготовлена. Производственная функция питекантропа имела вид: $Q = (K + 3)L^2$, где Q – число выкопанных в течение месяца корнеплодов, K – число изготовленных и использованных в течение месяца палок-копалок, L – число рабочих дней в течение месяца, которое питекантроп мог посвятить поиску и выкапыванию корнеплодов.

Питекантроп не имел выходных и работал 30 дней в месяц, распределяя эти дни между изготовлением палок-копалок и выкапыванием корнеплодов таким образом, чтобы максимизировать общее количество корнеплодов. Антропологи пожалели питекантропа и решили подарить ему некоторое количество палок-копалок, произведенных фабричным способом. Сколько, как минимум, готовых палок-копалок должны подарить питекантропу антропологи в расчете на месяц для того, чтобы он в течение месяца занимался только поиском и выкапыванием корнеплодов?

Решение

Пусть искомое число палок-копалок равно x. Тогда производственная функция питекантропа принимает вид: $Q = (K + 3 + x)L^2$, где K – это по-прежнему число палок-копалок, изготовленных самим питекантропом.

$Q = (K + 3 + x)L^2 = (K + 3 + x)(30 - K)^2 = (K + 3 + x)(900 - 60K + K^2) =$
$= 900K - 60K^2 + K^3 + 2700 - 180K + 3K^2 + 900x - 60xK + xK^2 =$
$= K^3 + (x - 57)K^2 + (720 - 60x)K + 900x + 2700.$

Q_{max} достигается при условии: $Q' = 3K^2 + 2(x - 57)K + 720 - 60x = 0.$
Если $K = 0$, то $60x = 720$. $x = 12$.

Ответ: 12 палок-копалок.

S030. Весь свой годовой доход (30 000 рублей) пенсионер Ветеранов расходует на два продукта – вермишель «Роллтон» (6 руб. за пачку) и горчицу «Распутин» (15 руб. за банку). В супермаркете, где пенсионер приобретает продукты, введена система премий для постоянных покупателей. За каждые 5 пачек «Роллтона», купленных за деньги, Ветеранов получает в подарок одну банку горчицы. Купив за деньги две банки горчицы, пенсионер получает бесплатно одну пачку «Роллтона». Функция полезности пенсионера имеет вид: $U = XY$, где X, Y – объемы вермишели и горчицы, фактически поступившие в потребление.

Сколько пачек «Роллтона» и банок горчицы фактически поступит в потребление пенсионера за год? Сколько единиц того и другого продукта он купит за деньги?

Решение

Будем считать, что X_m, Y_m – объемы вермишели и горчицы, купленные за деньги. В этом случае общие объемы потребления продуктов можно выразить следующим образом: $X = X_m + 0,5Y_m$; $Y = Y_m + 0,2\,X_m$. Из первого уравнения $Y_m = 2X - 2X_m$. Подставим это выражение во второе уравнение: $Y = 2X - 2X_m + 0,2\,X_m$. $X_m = (2X - Y) : 1,8$.
$Y_m = 2X - 2(2X - Y) : 1,8$.

Из бюджетного ограничения следует, что
$30\,000 = 6X_m + 15Y_m = 6(2X - Y) : 1,8 + 15\cdot[2X - 2(2X - Y) : 1,8];$
$9000 = X + 4Y$; $X = 9000 - 4Y$.

Представим функцию полезности как функцию одной переменной:
$U = XY = 9000Y - 4Y^2$. $U' = 9000 - 8Y = 0$. $Y = 1125$. $X = 9000 - 4 \cdot 1125 = 4500$.
$Y_m = 2X - 2(2X - Y) : 1,8 = 250$. $X_m = (2X - Y) : 1,8 = 4375$.

Ответ. Фактически поступит в потребление 4500 пачек «Роллтона» и 1125 банок горчицы, из них будет куплено за деньги: 4375 пачек «Роллтона» и 250 банок горчицы.