S021. Половину населения одной страны составляют холерики, другую половину – флегматики. Кривые Лаффера для той и другой группы населения представляют собой квадратичные параболы. Максимальная сумма налоговых поступлений от флегматиков равна 100 денежным единицам и достигается она при ставке подоходного налога, равной 20%. Максимум налоговых поступлений от холериков равен 180, и достигается он при ставке налога, равной 30%. При любой ставке налога и холерики, и флегматики честно платят налог со всей суммы своего дохода.

Какую единую ставку подоходного налога должно установить правительство для обеих групп населения, чтобы коэффициент Джини, рассчитанный на основе располагаемых доходов (т.е. оставшихся после уплаты налога) был равен $^1/_{14}$?

Решение

Уравнение кривой Лаффера для флегматиков имеет следующий вид: $T_1 = at^2 + bt + c$, где T_1 – общая сумма налоговых поступлений, t – ставка налога (десятичная дробь). Как известно, кривая Лаффера выходит из начала координат, т.е. при $t = 0$ $T_1 = 0$. Отсюда следует, что $c = 0$. Поскольку квадратичная парабола симметрична, при $t = 0{,}4$ $T_1 = 0$. $0 = a\times 0{,}4^2 + b\times 0{,}4$. $b = -0{,}4a$.

Наконец, из условия известно, что при $t = 0{,}2$ $T_1 = 100$.
$100 = a\times 0{,}2^2 + (-0{,}4a)\times 0{,}2$. Отсюда $a = -2500$, $b = 1000$. $T_1 = -2500\,t^2 + 1000\,t$.

T_1 – это сумма, составляющая долю t всего дохода флегматиков, который мы обозначим как I_1. Т.е. $I_1\times t = T_1$. $I_1 = T_1 / t = -2500\,t + 1000$. Располагаемый доход флегматиков $i_1 = I_1\times (1 - t) = -2500\,t\times (1 - t) + 1000\times (1 - t) = 2500\,t^2 - 3500\,t + 1000$.

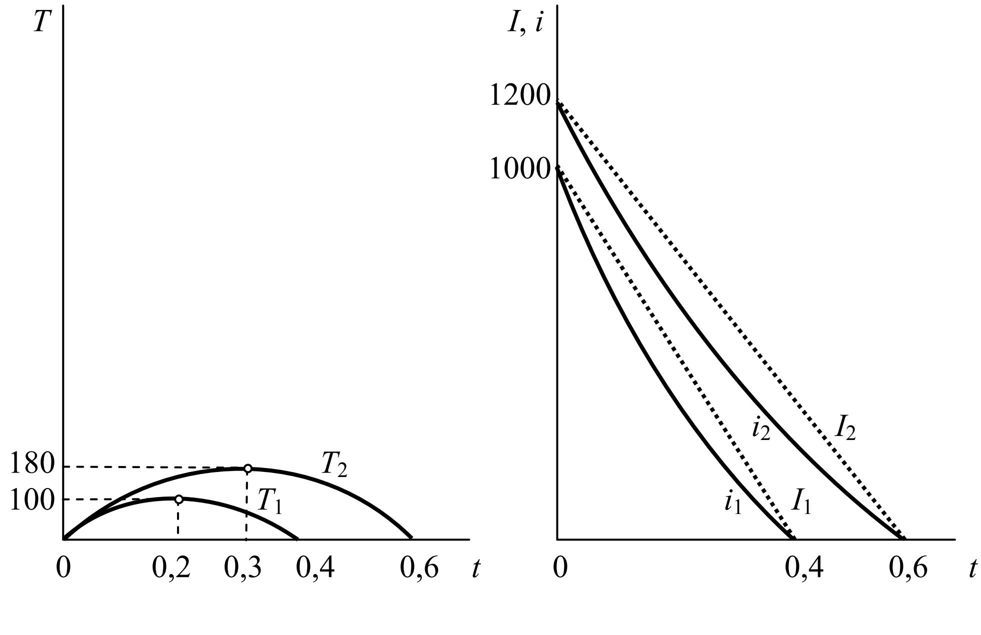
Рассуждая аналогичным образом, можно получить выражение для общего дохода холериков ($I_2 = -2000\,t + 1200$) и для их располагаемого дохода ($i_2 = 2000\,t^2 - 3200\,t +$ $+ 1200$).

Далее выясним взаимное расположение графиков функций i_1 и i_2. Для начала определим значения t, при которых $i_1 = i_2$.

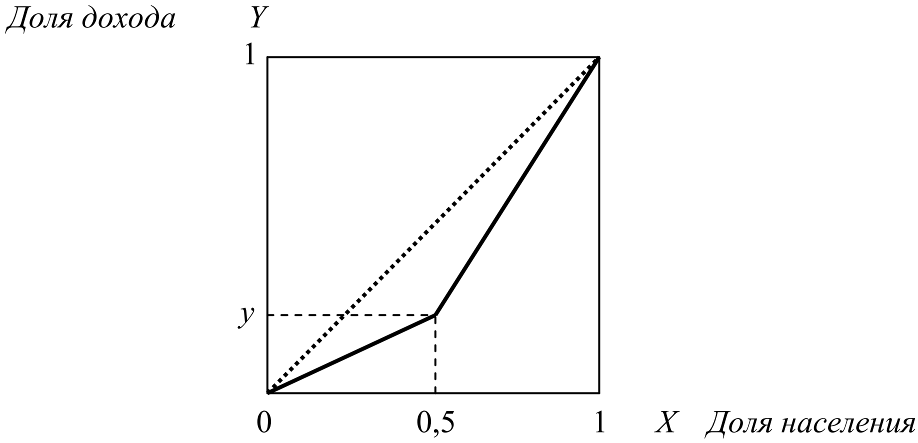
$2500\,t^2 - 3500\,t + 1000 = 2000\,t^2 - 3200\,t + 1200$. $5t^2 - 3t - 2 = 0$. $t_1 = 1$, $t_2 = -0{,}4$. Это означает, что на том интервале налоговой ставки, где *обе* группы населения работают и получают доход ($0 \le t < 0{,}4$) графики i_1 и i_2 не пересекаются.

При $t = 0$ $i_1 = 1000$, $i_2 = 1200$. Отсюда следует, что на всем интервале ($0 \le t < 0{,}4$) располагаемый доход холериков выше, чем располагаемый доход флегматиков.

Кривые Лаффера и графики функций T_1, T_2, I_1, I_2, i_1, i_2 показаны на рисунке, приведенном ниже.



Пусть доля флегматиков в общем располагаемом доходе равна y. Тогда кривая Лоренца для рассматриваемой страны имеет следующий вид:



Коэффициент Джини $G = \dfrac{0{,}5 - \dfrac{0{,}5\,y}{2} - \dfrac{y+1}{2} \times 0{,}5}{0{,}5} = 0{,}5 - y$. По условию $0{,}5 - y = \dfrac{1}{14}$.

$y = \dfrac{3}{7}$. $\dfrac{y}{1-y} = \dfrac{i_1}{i_2} = 0{,}75$. $2500\,t^2 - 3500\,t + 1000 = 0{,}75 \times (2000\,t^2 - 3200\,t + 1200)$.

$10\,t^2 - 11\,t + 1 = 0$. $t_1 = 1$ (этот корень не подходит по смыслу задачи, так как при ставке налога 100% располагаемые доходы обеих групп населения равны нулю), $t_2 = 0{,}1$.

Ответ: 10%.

S022. Для одного продавца функция спроса имеет вид: $Q_d = 2{,}25 - P^2$. Этот продавец очень плохо знает микроэкономику, поэтому он думает, что «предельная выручка» – это то же самое, что и «максимальная выручка». Опираясь на свои ошибочные представления, он выбрал такой объем выпуска, при котором выручка численно равна предельной выручке. Сколько процентов от действительно максимальной выручки он сейчас получает?

Решение

$P = \sqrt{2{,}25 - Q}$. $R = PQ = Q\sqrt{2{,}25 - Q}$. $MR = R' = \sqrt{2{,}25 - Q} - \dfrac{Q}{2\sqrt{2{,}25 - Q}}$.

Продавец ошибочно полагает, что R должен быть равен MR.

$Q\sqrt{2{,}25 - Q} = \sqrt{2{,}25 - Q} - \dfrac{Q}{2\sqrt{2{,}25 - Q}}$. $Q(2{,}25 - Q) = (2{,}25 - Q) - 0{,}5Q$.

$Q^2 - 3{,}75Q + 2{,}25 = 0$. $Q_{1,2} = \dfrac{3{,}75 \pm \sqrt{14{,}0625 - 9}}{2} = \dfrac{3{,}75 \pm 2{,}25}{2}$. $Q_1 = 3$ (не подходит, так как при этом $P = \sqrt{2{,}25 - 3}$). $Q_2 = 0{,}75$. $P = \sqrt{2{,}25 - 0{,}75} = \sqrt{1{,}5}$. Таким образом, в настоящий момент продавец получает выручку $R = PQ = 0{,}75\sqrt{1{,}5}$.

Действительно максимальная выручка достигается при условии:

$MR = R' = \sqrt{2{,}25 - Q} - \dfrac{Q}{2\sqrt{2{,}25 - Q}} = 0$. $2{,}25 - Q - 0{,}5Q = 0$. $Q = 1{,}5$.

$P = \sqrt{2{,}25 - 1{,}5} = \sqrt{0{,}75}$. Максимальная выручка $R_{max} = \sqrt{0{,}75} \times 1{,}5$. Доля максимальной выручки, получаемая продавцом: $\dfrac{R}{R_{\max}} = \dfrac{0{,}75\sqrt{1{,}5}}{1{,}5\sqrt{0{,}75}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071$.

Ответ: 70,71%.

S023. Одному гражданину срочно потребовался пылесос, но он не располагал необходимой суммой для его покупки. «Не страшно, – сказал представитель торговой фирмы, – мы можем продать пылесос в рассрочку на 2 года. В конце каждого из двух лет вы внесете равные платежи по 3276 рублей. А сейчас ничего платить не надо». После этого гражданин поинтересовался, возможна ли рассрочка на 3 года. «Тоже можно, – сказал представитель фирмы. – Это будут три равных платежа по 2376 рублей в конце каждого из трех лет».

Еще раз оценив свои финансовые возможности, гражданин заявил, что рассрочка на 4 года его окончательно устроит. «Такая рассрочка предоставляется только в качестве исключения, – сказал представитель фирмы. – И только тем покупателям, которые смогут самостоятельно рассчитать размер ежегодного платежа с точностью до копеек».

Помогите гражданину определить размер ежегодного платежа, уплачиваемого в конце каждого года, при рассрочке платежа на 4 года.

Решение

Пусть PV – сегодняшняя стоимость пылесоса. Из условий рассрочки платежа на 2 года следует, что $PV = \dfrac{3276}{1+r} + \dfrac{3276}{(1+r)^2}$.

Из условий рассрочки на 3 года: $PV = \dfrac{2376}{1+r} + \dfrac{2376}{(1+r)^2} + \dfrac{2376}{(1+r)^3}$. Пусть $\dfrac{1}{1+r} = k$.

Тогда можно составить уравнение: $3276\,k + 3276\,k^2 = 2376\,k + 2376\,k^2 + 2376\,k^3$.

$2376\,k^3 - 900\,k^2 - 900\,k = 0$. Корень $k = 0$ не имеет смысла. Упростив уравнение, получаем: $66\,k^2 - 25\,k - 25 = 0$. $k_{1,2} = \dfrac{25 \pm \sqrt{625+6600}}{132} = \dfrac{25 \pm 85}{132}$. $k_1 = \dfrac{110}{132} = \dfrac{1}{1+r}$.

Отсюда $r = 0{,}2$. Второй корень уравнения $\left(k_2 = \dfrac{-60}{132}\right)$ не имеет смысла.

Определив ставку дисконтирования r, мы можем узнать сегодняшнюю стоимость пылесоса: $PV = \dfrac{3276}{1+0{,}2} + \dfrac{3276}{(1+0{,}2)^2} = 5005$ руб. Далее можно определить размер ежегодного платежа при рассрочке на 4 года: $5005 = \dfrac{x}{1{,}2} + \dfrac{x}{1{,}2^2} + \dfrac{x}{1{,}2^3} + \dfrac{x}{1{,}2^4} = 2{,}58873\,x$.

$x = 1933{,}38$ руб. *Ответ*: 1933,38 руб.

S024. На каждом квадратном километре сельской местности равномерно распределены 1000 домохозяйств. Однажды местные власти решили установить в одной из точек местности телевизионный ретранслятор. После того как домохозяйства оплатят сооружение ретранслятора, он будет представлять собой чистое общественное благо.

Предполагаемые расходы на сооружение ретранслятора: $TC = q \times r^3$, где q – количество телевизионных каналов, которое будет передавать ретранслятор, r – радиус охвата местности телевизионным вещанием.

Каждое домохозяйство имеет идентичную функцию спроса на услуги ретранслятора: $q = 100(1 - P)$, где q – количество каналов, которое согласится оплатить домохозяйство, финансируя сооружение ретранслятора, если цена подключения одного канала будет равна P.

Каким будет количество каналов, решают местные власти. На какое количество каналов должен быть рассчитан ретранслятор, если местные власти захотят собрать с домохозяйств максимально возможную сумму на его сооружение?

Решение

Сформулируем обратную функцию спроса: $P = 1 - 0{,}01q$. Сумма, которую заплатит одно домохозяйство за возможность приема q каналов: $Pq = q - 0{,}01q^2$.

Число домохозяйств, которое сможет принимать сигнал и согласится финансировать сооружение ретранслятора: $1000\,\pi\,r^2$. Общая сумма денег, которую заплатят эти домохозяйства в зависимости от числа принимаемых каналов: $1000\,\pi\,r^2\,(q - 0{,}01q^2)$.

Эта величина должна быть равна предполагаемым расходам на сооружение ретранслятора. То есть $1000\,\pi\,r^2\,(q - 0{,}01q^2) = q\,r^3$.

Отсюда $r = 1000\,\pi\,(1 - 0{,}01q)$.

Общая сумма денег, которую заплатят домохозяйства:

$1000\,\pi\,r^2\,(q - 0{,}01q^2) = 1000\,\pi\,[1000\,\pi\,(1 - 0{,}01q)]^2\,(q - 0{,}01q^2) =$
$= 1\,000\,000\,000\,\pi^3\,q\,(1 - 0{,}01q)^3$.

Максимум этой суммы достигается при условии: $(1 - 0{,}01q)^3 - 0{,}03q(1 - 0{,}01q)^2 = 0$.
$1 - 0{,}04q = 0$. $q = 25$.

Ответ. 25 каналов.

S025. Некий гуманоид использует для медитации оранжевые и зеленые шарики из полудрагоценных камней. Каждый шарик может быть использован в неограниченном числе актов медитации. Эффективность медитации определяется формулой: $U = X^a\,Y^b$, где X – число используемых при медитации оранжевых шариков, Y – число используемых зеленых шариков ($a > 0$, $b > 0$). В настоящее время гуманоид имеет некоторое количество шариков того и другого цвета (всего их 80), но, как показывает функция полезности, желательно иметь их как можно больше. Если бы можно было обменять зеленые шарики на оранжевые в пропорции 1 : 2, то гуманоид обменял бы 11 зеленых (из числа имеющихся у него) на 22 оранжевых. Если бы, наоборот, можно было обменять оранжевые на зеленые в пропорции 1 : 2, то гуманоид обменял бы 8 оранжевых на 16 зеленых.

Сколько оранжевых и сколько зеленых шариков имеет гуманоид в настоящее время?

Внимание: ответ должен быть численным; он не должен выражаться через a и b.

Решение

Пусть первоначальное количество оранжевых шариков равно X_0, зеленых – Y_0.

Критерий оптимума для функции Кобба-Дугласа: $\frac{1}{a}P_X\,X = \frac{1}{b}P_Y\,Y$, где X и Y - объемы благ *после обмена*.

Рассмотрим первую ситуацию, где $\frac{P_Y}{P_X} = 2$. $\frac{1}{a}P_X\,X = \frac{1}{b}2P_X\,Y$. $\frac{1}{a}X = \frac{1}{b}2Y$.

$$\frac{1}{a}(X_0 + 22) = \frac{1}{b}2\,(Y_0 - 11) \qquad \textbf{(1)}.$$

Рассмотрим вторую ситуацию, где $\frac{P_X}{P_Y} = 2$. $\frac{1}{a}2\,P_Y\,X = \frac{1}{b}P_Y\,Y$. $\frac{1}{a}2\,X = \frac{1}{b}\,Y$.

$$\frac{1}{a}2\,(X_0 - 8) = \frac{1}{b}\,(Y_0 + 16) \qquad \textbf{(2)}.$$

Поделив соответственно правые и левые части уравнений **(1)** и **(2)** друг на друга, получим: $0{,}5\times\frac{X_0 + 22}{X_0 - 8} = 2\times\frac{Y_0 - 11}{Y_0 + 16}$. $0{,}5(X_0 + 22)(Y_0 + 16) = 2(Y_0 - 11)(X_0 - 8)$.

Из условия известно, что $X_0 + Y_0 = 80$. $Y_0 = 80 - X_0$. $(X_0 + 22)(80 - X_0 + 16) =$
$= 4(80 - X_0 - 11)(X_0 - 8)$. $3X_0^2 - 234X_0 + 4320 = 0$. $X_0^2 - 78X_0 + 1440 = 0$.
$X_{01} = 48$, $X_{02} = 30$. $Y_{01} = 80 - X_{01} = 32$. $Y_{02} = 80 - X_{02} = 50$.

Ответ. В настоящее время гуманоид имеет либо 48 оранжевых шариков и 32 зеленых, либо 30 оранжевых и 50 зеленых.