S016. Долгое время фирма X являлась единственным производителем уникального аппарата – генератора закадрового смеха для комедийных сериалов. Фирма X была легальным монополистом, так как имела патент на данный аппарат. Функция спроса на рынке этих аппаратов в расчете на год имеет вид: $Q_d = 600 - P$. Предельные издержки фирмы X (равные средним издержкам) составляют 100 денежных единиц.

Однако через некоторое время на рынке появилась китайская фирма Y, заявившая о возможности производства такого же аппарата и предложившая фирме X предоставить ей (фирме Y) право производства данного аппарата на условиях выплаты патентообладателю (фирме X) специального вознаграждения – роялти – за каждую выпущенную единицу продукции. Предельные издержки фирмы Y (так же равные средним издержкам) составляют 40 денежных единиц.

Предполагается, что обе фирмы знают об издержках друг друга, но это знание нельзя использовать как аргумент в переговорном процессе, поскольку информация об издержках получена, мягко говоря, неофициальным путем. Кроме того, обеим фирмам известна функция спроса.

После длительных переговоров между фирмами была выработана следующая формула соглашения: сначала фирма X устанавливает величину роялти (r), затем фирма Y определяет свой объем выпуска Q_Y, с которым должна согласиться фирма X, а после этого фирма X определяет свой объем выпуска Q_X, с которым должна согласиться фирма Y. Если фирму Y не устроит величина роялти, она может выбрать нулевой выпуск. Соглашение является бессрочным, поэтому будем предполагать, что обе фирмы максимизируют свою ежегодную прибыль.

Какой размер роялти (r) установит фирма X и на сколько процентов вырастет ее ежегодная прибыль после заключения соглашения?

Решение

Для начала определим годовую прибыль фирмы X в тот период, когда она была единственным производителем генераторов смеха. $\pi = P\times Q - 100Q = (600 - Q)Q - 100Q =$
$= -Q^2 + 500Q$. $2Q = 500$. $Q = 250$. $\pi_{max} = -250^2 + 500\times 250 = 62500$.

Логика рассуждений руководства фирмы X в процессе выработки соглашения будет следующей. Предположим, фирма X установила роялти в размере r. Узнав величину r, фирма Y пытается определить Q_Y. Для этого она, в свою очередь, моделирует поведение фирмы X. При неких *уже установленных* значениях r и Q_Y мы получаем следующие значения переменных величин:

остаточный спрос для фирмы X: $Q_X = 600 - P - Q_Y$;

рыночная цена: $P = 600 - Q_X - Q_Y$;

прибыль фирмы X с учетом роялти: $\pi_X = P\times Q_X - 100Q_X + r\times Q_Y =$
$= (600 - Q_X - Q_Y)\times Q_X - 100Q_X + r\times Q_Y = 500Q_X - Q_X^2 - Q_X Q_Y + r\times Q_Y$ **(1)**

На этом этапе решения часто возникает вопрос: почему бы не найти максимум π_X как функции двух переменных: Q_X и r? К сожалению, это было бы ошибкой. В выражении **(1)** в качестве экзогенной (заданной извне) величины присутствует Q_Y, которая является функцией r (поскольку объем выпуска фирмы Y, очевидно, зависит от величины роялти), а вид этой функции нам пока неизвестен.

Поэтому, получив выражение для π_X, мы решаем следующую задачу: для некоторой неизвестно как выбранной фирмой X величины роялти (r) и установленной фирмой Y величины ее выпуска Q_Y определить, какой объем выпуска выберет фирма X, максимизируя свою ежегодную прибыль. Для этого возьмем производную функции π_X по переменной Q_X.

$\pi_X' = 500 - 2Q_X - Q_Y = 0$. $Q_X = 250 - 0{,}5Q_Y$. Это *уравнение реакции* объема выпуска фирмы X на объем выпуска фирмы Y. Примечательно, что эта реакция будет одной и той же независимо от величины роялти, выбранной фирмой X. Точнее, так: исходя из функций издержек и функции спроса, присутствующих в данной задаче, для любого вы-

бранного фирмой X значения r фирма Y, максимизируя прибыль, выберет такое значение Q_Y, в ответ на которое фирма X, также максимизируя прибыль, выберет
$Q_X = 250 - 0{,}5Q_Y$ **(2)**

Далее фирма Y на основе уравнения реакции фирмы X выводит собственную функцию прибыли (с учетом роялти, выплачиваемых фирме X): $\pi_Y = P\times Q_Y - 40Q_Y - r\times Q_Y =$
$= (600 - Q_X - Q_Y)\times Q_Y - 40Q_Y - r\times Q_Y = [600 - (250 - 0{,}5Q_Y) - Q_Y]\times Q_Y - 40Q_Y - r\times Q_Y =$
$= -0{,}5Q_Y^2 + 310Q_Y - r\times Q_Y$. $\pi_Y' = -Q_Y + 310 - r = 0$. $Q_Y = 310 - r$. Это *уравнение реакции* объема выпуска фирмы Y на величину роялти r.

Используя уравнение **(2)**, получаем: $Q_X = 250 - 0{,}5\times(310 - r) = 95 + 0{,}5r$. Подставим теперь полученные выражения для Q_X и Q_Y в уравнение **(1)**:

$\pi_X = 500(95 + 0{,}5r) - (95 + 0{,}5r)^2 - (95 + 0{,}5r)(310 - r) + r\times(310 - r) =$
$= -0{,}75r^2 + 405r + 9025$.

Максимум π_X достигается при условии: $-1{,}5r + 405 = 0$. $r = 270$. Максимальное значение прибыли фирмы X: $\pi_X = -0{,}75\times 270^2 + 405\times 270 + 9025 = 63700$.

Индекс роста прибыли: $\dfrac{63700}{62500} = 1{,}0192$.

Ответ. $r = 270$, прибыль вырастет на 1,92%.

S017. Школьница Шарлотта покупает в школьной столовой только два блюда: клубничные пудинги и омлеты. Ее функция полезности имеет вид: $U = XY$, где X – число купленных в течение месяца пудингов, Y – число купленных в течение месяца омлетов. Омлеты и пудинги можно приобрести как в качестве отдельных блюд, так и в составе комплексного обеда (пудинг + омлет). В качестве отдельного блюда пудинг имеет цену $P_X = 45$ руб., омлет как отдельное блюдо продается по цене $P_Y = 10$ руб. Комплексный обед стоит 50 рублей. Месячный бюджет Шарлотты равен 3600 рублям. Какое количество пудингов и омлетов съест Шарлотта за месяц, максимизируя свою функцию полезности?

Решение

Пусть X_0 и Y_0 – это объемы пудингов и омлетов, купленных как отдельные блюда, а k – число купленных комплексных обедов. Для начала выясним, какие значения могут принимать эти переменные. Зададимся вопросом: может ли быть получено такое оптимальное решение, при котором $X_0 > 0$, $Y_0 > 0$, $k > 0$? Если получено решение, при котором X_0 и Y_0 одновременно больше нуля, то это значит, что вместо некоторого количества комплексных обедов были приобретены за более высокую цену пары пудингов и омлетов в качестве отдельных блюд. Очевидно, такое решение не может быть оптимальным. Следовательно, какая-то из этих переменных (X_0 или Y_0) должна быть равна нулю.

Если бы пудинги и омлеты имели одну и ту же цену, то при заданной функции полезности Шарлотта приобрела бы одинаковые объемы этих блюд. Но, поскольку омлет стоит намного дешевле, а показатели степени при X и Y в функции Кобба-Дугласа равны, число омлетов будет больше, чем число пудингов. Это значит, что все пудинги будут приобретены в составе комплексных обедов. То есть нулю равна величина X_0. В этом случае общее число пудингов $X = k$, общее число омлетов $Y = Y_0 + k$.

Бюджетное ограничение Шарлотты: $3600 = 10Y_0 + 50k$. Отсюда $k = 72 - 0{,}2\,Y_0$.

$U = XY = k\times(Y_0 + k) = (72 - 0{,}2\,Y_0)(Y_0 + 72 - 0{,}2\,Y_0) = -0{,}16Y_0^2 + 43{,}2Y_0 + 5184$.

U_{max} достигается при условии: $-0{,}32Y_0 + 43{,}2 = 0$. $Y_0 = 135$. $k = 72 - 0{,}2\times 135 = 45$.
$X = k = 45$. $Y = Y_0 + k = 135 + 45 = 180$.

Ответ. 45 пудингов и 180 омлетов.

S018. Функции спроса и предложения являются линейными, при этом график функции предложения выходит из начала координат. При отсутствии налогов равновесный объем $Q = 32$, равновесная цена $P = 16$. Максимальная выручка, которую могут получить продавцы на данном рынке (вообще, в принципе могут получить, независимо от того, какая у них в данный момент функция предложения), равна R_0. Максимальная сумма потоварного налога, которую государство может получить на данном рынке (при данных функциях спроса и предложения), равна $0{,}8\ R_0$.

Сформулируйте уравнения функций спроса и предложения.

Решение

График функции предложения выходит из начала координат, при этом он проходит через точку (32; 16). Поэтому $Q_s = 2P$.

Пусть функция спроса имеет вид: $Q_d = a - bP$. Учитывая, что при $P = 16$ $Q = 32$, можно записать: $32 = a - b\times 16$. Отсюда $a = 32 + 16b$.

Кстати. Если вы на данном этапе решения, желая сократить число неизвестных, сразу подставите это соотношение в формулы для Q, P и t, то впоследствии вас ожидают крупные неприятности. Вы получите практически нерешаемое уравнение. Это такая ловушка, заботливо расставленная для вас автором задачи. Обойти ее почти невозможно. Зато вы получите огромное, неоценимое интеллектуальное наслаждение, выбираясь из нее.

Максимальная выручка, которая может быть получена на данном рынке:

$$R_0 = \frac{a}{2b}\times\frac{a}{2} = \frac{a^2}{4b}.$$

Как мы знаем, максимальная сумма налоговых поступлений, которая может быть получена при линейных функциях спроса и предложения, будет в любом случае одной и той же – независимо от того, для кого вводится налог – для покупателей или продавцов. Предположим, для продавцов введен потоварный налог t. Новая функция предложения: $Q_{s1} = 2(P - t)$.

Условие равновесия на рынке: $a - bP = 2(P - t)$. $P = \dfrac{a+2t}{2+b}$.

Равновесный объем: $Q = Q_{s1} = 2(P - t) = 2\left(\dfrac{a+2t}{2+b} - t\right)$.

Общая сумма налоговых поступлений: $T = Q\,t = 2\left(\dfrac{a\,t + 2t^2}{2+b} - t^2\right)$.

$T' = 2\left(\dfrac{a+4t}{2+b} - 2t\right) = 0$. $t = \dfrac{a}{2b}$. Максимум налоговых поступлений:

$T_{max} = Q\,t = 2\dfrac{a}{2b}\left(\dfrac{a+\frac{a}{b}}{2+b} - \dfrac{a}{2b}\right) = \dfrac{a^2}{2b(2+b)}$. По условию задачи: $T_{max} = 0{,}8\ R_0$.

$\dfrac{a^2}{2b(2+b)} = 0{,}8\dfrac{a^2}{4b}$. $b = 0{,}5$. $a = 32 + 16b = 40$.

Ответ. $Q_d = 40 - 0{,}5P$; $Q_s = 2P$.

S019. Функция спроса на рынке банковских сейфов имеет вид: $Q_d = 2000 - 100P$. Первоначально на рынке было 100 идентичных фирм-производителей, каждая из которых имела функцию предложения $q = P$. Правительство решило ввести потоварный налог для производителей сейфов в размере t и одновременно с таким расчетом сократить число фирм-производителей (лишив часть из них под разными предлогами государственных лицензий), чтобы каждая из оставшихся фирм после вычета налогов получала ту же самую выручку, что и раньше. Какую величину потоварного налога t с учетом всех этих условий установит правительство, чтобы максимизировать общую сумму налоговых поступлений?

Решение

Первоначальная функция предложения: $Q_s = 100P$. $Q_d = Q_s$. $2000 - 100P = 100P$. Равновесная цена $P^* = 10$, равновесный объем $Q^* = 1000$. Первоначальная выручка одной фирмы: $(P^*Q^*) : 100 = 100$.

Пусть число фирм после всех мероприятий правительства равно x. Новая общая функция предложения будет иметь вид: $Q_{s1} = x(P - t)$. Пусть $Q_{s1} = Q_d = Q$.

Для того чтобы каждая фирма после вычета налогов получала прежнюю выручку, необходимо выполнение условия: $\frac{PQ}{x} - \frac{tQ}{x} = 100$. Отсюда $x = 0{,}01Q\,(P - t)$.

$Q = x(P - t) = 0{,}01Q\,(P - t)^2$. $1 = 0{,}01(P - t)^2$. $10 = \pm\,(P - t)$. Очевидно, $P > t$, поэтому $P - t = 10$. $P = 10 + t$.

Из функции спроса $Q = 2000 - 100P = 2000 - 100(10 + t) = 1000 - 100\,t$.

Общая сумма налоговых поступлений $T = t\,Q = t\,(1000 - 100\,t) = 1000\,t - 100\,t^2$.

$T' = 1000 - 200\,t = 0$. $t = 5$.

Ответ: $t = 5$.

S020. Граф Бартоломео имеет в личной собственности глубоководный пруд, в котором ежегодно производится сезонный лов рыбы. Для лова рыбы он нанимает рыбаков и приобретает сети. Сеть служит только в течение одного сезона. Один рыбак, используя одну сеть, может выловить в течение сезона 87 рыб. Если одну сеть держат два рыбака, то их общий улов составит: 87 + 86 рыб. Если одну сеть держат три рыбака, то их общий улов будет равен: 87 + 86 + 85 рыб. И так далее. Другими словами, предельный продукт труда каждого последующего рыбака (из числа занятых на одной и той же сети) на единицу меньше, чем предельный продукт предыдущего.

Если граф Бартоломео приобретает несколько сетей для одного сезона лова рыбы, то на каждую сеть приходится одинаковое число рыбаков. Чтобы нанять одного рыбака на весь сезон лова рыбы, надо заплатить ему 1 лиру. Одна сеть стоит 5 лир. Сумма денег, которую граф может потратить на ловлю рыбы, равна 300 лирам.

a) Для выбранной графом технологии лова рыбы сформулируйте производственную функцию в виде: $Q = f(K, L)$, где Q – общее число выловленных рыб, K – общее число сетей (объем капитала), L – общее число рыбаков на всех сетях, вместе взятых.

b) Какую отдачу от масштаба имеет найденная Вами производственная функция?

c) Сколько всего рыбаков наймет граф и сколько купит сетей?

d) Каким будет максимально возможный улов рыбы?

Решение

a) Предположим, каждую сеть держат s рыбаков. Тогда улов в расчете на одну сеть будет равен: $87 + 86 + 85 + \ldots + 87 - (s - 1) = \dfrac{87 + 87 - (s-1)}{2} \times s = 87{,}5s - 0{,}5s^2$.

Очевидно, $s = \dfrac{L}{K}$.

Общий улов составит: $Q = f(K, L) = K\left(87{,}5\dfrac{L}{K} - 0{,}5\dfrac{L^2}{K^2}\right) = 87{,}5L - 0{,}5\dfrac{L^2}{K}$.

b) Пусть первоначальное значение функции: $Q_0 = 87{,}5L - 0{,}5\dfrac{L^2}{K}$. Увеличив объемы K и L в n раз, мы получим новое значение функции: $Q_1 = n\times 87{,}5L - n\times 0{,}5\dfrac{L^2}{K}$.

$Q_1 = n\,Q_0$. Функция имеет постоянную отдачу от масштаба.

c) Бюджетное ограничение для графа Бартоломео имеет вид: $300 = L + 5K$.

$L = 300 - 5K$. $\quad Q = 87{,}5(300 - 5K) - 0{,}5\dfrac{(300-5K)^2}{K} =$

$$= \frac{87{,}5K(300-5K) - 0{,}5(300-5K)^2}{K} = \frac{-450K^2 + 27750K - 45000}{K}.$$

$$Q' = \frac{(-900K + 27750)K - (-450K^2 + 27750K - 45000)}{K^2} = 0.$$

$-450K^2 + 45000 = 0$. $\quad K = 10$. $\quad L = 300 - 5K = 250$.

d) $Q_{max} = 87{,}5\times 250 - 0{,}5\dfrac{250^2}{10} = 18750$.

Ответ. a) $Q = f(K, L) = 87{,}5L - 0{,}5\dfrac{L^2}{K}$; b) функция имеет постоянную отдачу от масштаба; c) 250 рыбаков и 10 сетей; d) 18750.