

**Теория игр– β** **Листок 3.** Олигополии: необычная конкуренция**Преподаватели:** Шумилова Вика**Составитель:** Шумилова Вика**Дедлайн:** 12 августа 2023 года, 21:00 МСКЗадачи в этом листке можно сдавать **только по порядку**.**Задача 1.** Хотеллинг в Хогсмиде

Хогсמיד — деревушка волшебников, устроена как одна большая улица, длиной 1 км. Известно, что $\frac{1}{8}$ населения проживает в правом конце; а в левом проживает $\frac{3}{8}$, остальные жители равномерно распределены по главной улице. Любимые заведения жителей, «3 метлы» и «Сладкое королевство», производят соленую карамельку. Каждый житель деревушки будет регулярно посещать то заведение, которое находится ближе всего к нему. Цена карамельки в каждом месте одинакова, определяется правительством и выше предельных издержек заведений. Единственное, что могут выбирать «3 метлы» и «Сладкое королевство» — это их местоположение. Полезность жителей от поедания карамельки равна A . Будем считать, что один житель ест одну карамельку. Значение A настолько большое, что каждому человеку из города выгоднее покупать карамельку, даже если магазин находится в самой отдаленной точке и самый дорогой, чем не покупать совсем.

а) Найдите расположение заведений, производящих соленые карамельки.

б) Найдите расположение заведений, если справа проживает $\frac{1}{4}$ населения; слева проживает $\frac{1}{2}$ населения?

Задача 2. Еще Хотеллинг

Волшебники живут вдоль Тисовой улицы длины 1 км. Известно, что все жители распределены равномерно вдоль этой дороги. На этой улице есть всего две фирмы, продающие защиту от дементоров: Гарри и Поттер, расположенные в крайних точках противоположных концов Тисовой улицы. Предельные издержки у обеих фирмы равны 6 ден.ед.. Известно, что Гарри и Поттер продают одинаковый товар. Издержки проезда до магазина для жителя равны x^2 за x км пути до фирмы. Издержки они несут только в одну сторону — до магазина, так как после покупки волшебники защищены от дементоров и могут спокойно идти по улице.

Каждый житель покупает максимум единицу продукта и получает за неё полезность A . Будем считать, что значение A настолько большое, что каждому человеку из города выгоднее покупать товар в самой отдаленной и самой дорогой (для данного потребителя по издержкам) точке, чем не покупать совсем. Найдите равновесие на рынке, если известно, что Гарри и Поттер одновременно определяют цены на защиту от дементоров.

Задача 3

В Хогвартсе прячутся от Амбридж два факультета: Гриффиндор и Когтевран. У обоих факультетов договоренность: они не палят друг друга перед злобной директрисой. За это факультеты получают возможность тренироваться в выручай-комнате раз в неделю. Каждая тренировка приносит любому из факультетов 50 галеонов. Инспекционная дружина всячески пытается поймать школьников на каких-либо правонарушениях. Поэтому она вводит «приз» 400 галеонов за то, что факультет раскроет секрет другого факультета, где они тренируются. Правда, в таком случае ни Гриффиндор, ни Когтевран не будут больше тренироваться в Выручай-комнате. Поэтому раз в неделю они будут получать только 10 галеонов. Учащиеся ценят доход, получаемый в будущем не так высоко, как в настоящем. Так, полученный на следующей неделе доход X сегодня ценится как $\beta \cdot X$, где $\beta < 1$ — фактор дисконтирования.

Найдите, при каком значении фактора дисконтирования, факультеты никогда не раскроют Амбридж секрет Выручай-комнаты, если они максимизируют суммарно заработанные свои галеоны

на протяжении бесконечного количества недель? То есть, если в каком-то периоде Гриффиндор сдаст Инспекционной дружине Когтевран, то всё бесконечное число последующих периодов этот факультет будет получать только 10 галеонов.

Задача 4

В стране Гриффиндория метлы для квиддича продают два производителя: Джордж и Фред. Известно, что издержки первого имеют вид: $TC_1 = Q_1^2$, а второго: $TC_2 = 2Q_2^2$. Спрос на метлы имеет вид: $P_d = 276 - Q$, где $Q = Q_1 + Q_2$. Известно, что Фред и Джордж соревнуются, одновременно выбирая количество производимых метел.

а) Найдите, какие прибыли будут получать Фред и Джордж.

б) Найдите сумму прибылей каждого из производителей, если каждый год они таким образом продают товар и получают прибыль, найденную вами в первом пункте. Действуют на рынке Фред и Джордж бесконечное число периодов. При этом, прибыль, полученную в следующем периоде они ценят в β раз меньше, чем ту, что заработают в этом. Так, сумму прибылей, приведенную к первому году можно записать как: $\Pi = \pi_1 + \beta \cdot \pi_2 + \beta^2 \cdot \pi_3 + \dots$

в) Фред и Джордж узнали, что они могут объединиться. Тогда их издержки волшебным образом станут $TC = 0.5Q^2$, где Q — их общее количество. Таким образом, они станут монополистом на рынке с тем же спросом, а полученную прибыль поделят пополам. Найдите приведенную сумму прибылей каждой из фирм, если они будут кооперироваться бесконечное количество периодов.

г) Найдите, при каком β Фред или Джордж захотят отклониться от установленной стратегии. Если в какой-то момент кто-то из братьев отклоняется, то в этот период они оба не производят ничего. А уже последующие периоды соревнуются по Курно.

Задача 5. Цитрусовый смузи

На рынке мандаринов действует фирма Апельсинка. Спрос на мандарины имеет вид:

$$Q_d(P) = 24 - P$$

Еще одна фирма Грейпфрут хочет зайти на рынок, но она находится очень далеко от рынка сбыта, поэтому ей нужно пользоваться транспортными услугами, которые также предоставляет Апельсинка. Фирма устанавливает плату за свои услуги транспортировки в размере t за каждую перевезенную единицу продукции. А потом Апельсинка и Грейпфрут одновременно выбирают количество мандаринов, которое будут продавать. Интересно, что издержки на производство (выращивание цитрусовых) у обеих фирм одинаковые и равны $TC_i = 6Q_i$. Апельсинка не несет издержек на транспортировку.

а) Найдите, какую плату за транспортировку установит Грейпфрут, и какие объемы продаж мандаринов будут у каждой фирмы.

б) Что-то произошло (я не придумала, что именно). Теперь взаимодействие фирм происходит следующим образом: Апельсинка выбирает и объявляет t и количество мандаринов, которые продаст. После чего Грейпфрут выбирает свое продаваемое количество мандаринов. Найдите t и объемы продаж мандаринов каждой фирмой в этом случае. Какой при этом будет прибыль Апельсинки?

в) Апельсинка решила установить не потоварную плату за транспортировку с фирмы Грейпфрут, а разовую пошлину (независящую от объема товара), которую та должна заплатить, если решит пользоваться услугами транспортировки. Апельсинка хочет получить ровно такую же прибыль, как и в предыдущем пункте. Какой размер пошлины она установит, если в данном пункте Апельсинка устанавливает размер пошлины до того, как фирмы одновременно выбирают объем выпуска?

Задача 6. Дополнительная задачка — вне зачета

Линейный город единичной длины населяют идентичные волшебники. Они отправляют своих детей в одну из 3-х школ магии: Шармбатон, Хогвартс и Дурмстранг. Дети распределены по городу равномерно. Обучаться можно в одном из этих трёх заведений. Школа Шармбатон базируется на левом краю города, Хогвартс — в самом центре, а Дурмстранг находится на правом краю города. Все школы имеют нулевую себестоимость обучения. Транспортные издержки обучающихся на перемещение по городу равны $0,25 \cdot x$ д.е. за x пройденного расстояния. Не забудьте, что детям еще надо вернуться домой. При любых ценах на учебу волшебники оплатят образование своим детям. Потребители выбирают школу, в которой суммарные расходы на обучение — цена плюс транспортные издержки — будут наименьшими.

а) Пусть школы, максимизируя прибыль, назначают свои цены одновременно и независимо. Найдите равновесие.

б) Пусть отныне хронология принятия решений иная. Хогвартс является лидером, выбирая свою цену первой, а школы по краям являются последователями, одновременно выбирая свои цены на второй стадии игры. Найдите равновесие.