Элементы математического анализа

Летняя экономическая школа «I Love Economics»
Преподаватель: Илья Щуров
Ассистенты: Даниил Вишнев, Даниил Евсеев
Даты: 13—18 августа 2015 г.

Экономика для школьников
ILoveEconomics.ru

1. Наивные пределы

Определение 1. *Окрестностью* некоторой точки a называется любой открытый интервал (c, d), содержащий a. *Проколотой окрестностью* точки a называется любая окрестность этой точки, из которой выкинута сама точка a.

Определение 2. Неформальное определение предела. Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки a. Говорят, что функция f *имеет предел* b в точке a, если при неограниченном приближении x к a значение $f(x)$ функции f в точке x неограниченно приближается к b. При этом значение f в точке a может отличаться от b или вообще быть не определено.

Пишут: $f(x) \to b$ при $x \to a$ или $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Задача 1.1

Угадать значение предела (если он существует), пользуясь неформальным определением и вычисляя значение функции в указанных точках. При необходимости, использовать калькулятор или компьютер. Обосновать аналитически, что предел действительно равен найденному числу.

а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-x-2}$, $x = 2{,}5; 2{,}1; 2{,}05; 2{,}001; 1{,}9; 1{,}99; 1{,}999$.

б) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-2x}{x^2-x-2}$, $x = 0; -0{,}5; -0{,}9; -0{,}99; -0{,}999; -1{,}5; -1{,}1; -1{,}01; -1{,}001$.

Задача 1.2

Угадать значение предела, пользуясь неформальным определением. В этот раз последовательность значений x нужно придумать самостоятельно.

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

Задача 1.3

Найти значение функции $f(x) = \cos\frac{4\pi}{x}$ в точках $x = 0{,}1; 0{,}01; 0{,}001; 0{,}0001$. Чему может равняться $\lim_{x\to 0} f(x)$? Построить график $y = f(x)$. Что вы теперь можете сказать об указанном пределе?

Задача 1.4

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 & x = 0, \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$$

а) Построить график $y = f(x)$.
б) Найти (если существуют) пределы $\lim_{x\to -1} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Задача 1.5

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} -x-1, & x < 1, \\ 0 & x = 1, \\ x^3+1, & x > 1. \end{cases}$$

а) Построить график $y = f(x)$.
б) Найти (если существуют) пределы $\lim_{x\to -1} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Теорема 1. ***Арифметика пределов.*** *Пусть c — некоторая константа и существуют пределы*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a} g(x) = B.$$

Тогда

1. $\lim\limits_{x\to a} c = c$;
2. $\lim\limits_{x\to a} x = a$;
3. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A + B$;
4. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x)) = A - B$;
5. $\lim\limits_{x\to a}(cf(x)) = cA$;
6. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = AB$;
7. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ *если* $B \neq 0$;
8. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{A}$.

Задача 1.6

Пользуясь арифметикой пределов, доказать, что $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^n = (\lim\limits_{x\to a} f(x))^n$

Задача 1.7

Пользуясь арифметикой пределов, найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to -2}(3x^4+2x^2-x+1)$;

б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2+1}{x^2+6x-4}$;

в) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(4+h)^2-16}{h}$;

г) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}$;

д) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}{4+x}$;

е) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}$.

Задача основана на книге Stewart, *Calculus*.

Список литературы

Stewart, James. *Calculus*. Thomson, 2008.

Элементы математического анализа

Летняя экономическая школа «I Love Economics»
Преподаватель: Илья Щуров
Ассистенты: Даниил Вишнев, Даниил Евсеев
Даты: 13—18 августа 2015 г.

2. Продвинутые пределы

Определение 3. Для некоторой точки a её ε-окрестностью (читается *эпсилон-окрестностью*) $U_\varepsilon(a)$ называется интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Проколотой ε-окрестностью называется множество $\mathring{U}_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$.

Определение 4. Строгое определение предела. Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки a. Говорят, что функция f *имеет предел* b в точке a, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всякого $x \in \mathring{U}_\delta(a)$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$

Пишут:

$$f(x) \to b \text{ при } x \to a$$

или

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

Это не самое простое определение в вашей жизни. Понять его «с первого прочтения» невозможно. Чтобы немного освоиться с языком, который в нём используется (он называется «языком кванторов», потому что слова «для всякого» и «существует» по-научному называются кванторами), попробуем доказать некоторые простые утверждения о пределах, пользуясь только определением. Если вы не знаете, как подступиться к этим задачам, но хотите их решить — не стесняйтесь спросить совета преподавателей и ассистентов.

Задача 2.1

Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} (2x) = 0$.

Подсказка: попробуйте взять какое-нибудь конкретное значение ε — например, $\varepsilon = 0{,}1$ — и найти подходящее значение δ; затем докажите, что подобрать подходящее δ можно при любом ε.

Задача 2.2

Доказать что

а) $\lim\limits_{x\to 2} 4 = 4$;
б) $\lim\limits_{x\to 1} (2x+3) = 5$;
в) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$;
г) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$;
д) $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$;
е) $\lim\limits_{x\to a} x = a$.

Теперь мы умеем решать конкретные примеры с помощью определения. Однако дело это трудоёмкое и не очень приятное. На практике люди чаще всего для вычислений используют *арифметику пределов* (см. листок 1), а вот сама теорема об арифметике пределов доказывается как раз с помощью определений. Однако прежде, чем мы перейдём к этой части, нужно разобрать более простую задачу, использующую кванторный язык.

Задача 2.3

Рассмотрим два определения ограниченной последовательности:

1. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется *строго ограниченной*, если существует такое C, что для всех натуральных k, $|a_k| < C$.
2. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется *слабо ограниченной*, если существует такое C, что для всех натуральных k, $|a_k| \leqslant C$.

Являются ли эти определения эквивалентными? Иными словами, верно ли, что любая строго ограниченная последовательность является слабо ограниченной и наоборот, любая слабо ограниченная является строго ограниченной. Если это верно, докажите. Если неверно, приведите пример последовательности, ограниченной согласно одному определению и не ограниченной согласно второму.

Задача 2.4

Докажите с помощью определения предела, что

$$\lim_{x\to a} cf(x) = c \lim_{x\to a} f(x).$$

Подсказка: В качестве нового δ можно взять старое для ε/c.

Задача 2.5

Докажите, что предел суммы двух функций равен сумме пределов (если они существуют).

Задача 2.6

Докажите, что функция, имеющая предел в некоторой точке, ограничена в некоторой окрестности этой точки

Задача 2.7

Докажите, что предел произведения равен произведению пределов (если эти пределы существуют).

Подсказка: нужно воспользоваться предыдущей задачей.

Задача 2.8

Докажите, что предел частного равен частному пределов (если оба предела существуют и предел знаменателя отличен от нуля).

Элементы математического анализа

Летняя экономическая школа «I Love Economics»
Преподаватель: Илья Щуров
Ассистенты: Даниил Вишнев, Даниил Евсеев
Даты: 13—18 августа 2015 г.

3. Производная

Задача 3.1

Тариф сотовой сети предполагает, что в течение первых трёх минут действует поминутная тарификация: за каждую полную или неполную минуту разговора начисляется ровно 10 рублей (например, если вы поговорили одну секунду, то заплатите за звонок 10 рублей, если одну минуту ровно — тоже 10 рублей, а если одну минуту и две секунды — то уже 20 рублей). По истечении трёх минут начинает действовать непрерывный тариф: стоимость звонка пропорциональна длине разговора из расчёта 10 рублей за минуту (например, за разговор в 4,5 минуты будет заплачено ровно 45 рублей).

а) Построить график функции $P(t)$ зависимости стоимости разговора от его времени.
б) Найти $\lim_{t\to1^+} P(t)$, $\lim_{t\to1^-} P(t)$, $\lim_{t\to1} P(t)$, $\lim_{t\to3} P(t)$

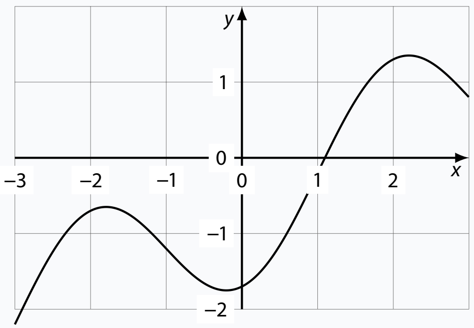
Определение 5. *Производной* функции f в точке x называется предел

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Часто числитель дроби под знаком предела обозначают условно через Δf. Производная показывает мгновенную скорость возрастания функции f в точке x и равна угловому коэффициенту касательной к графику в этой точке. Если у функции существует производная в точке x, то функция называется *дифференцируемой* в точке x.

Задача 3.2

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, график которой приведен на картинке.



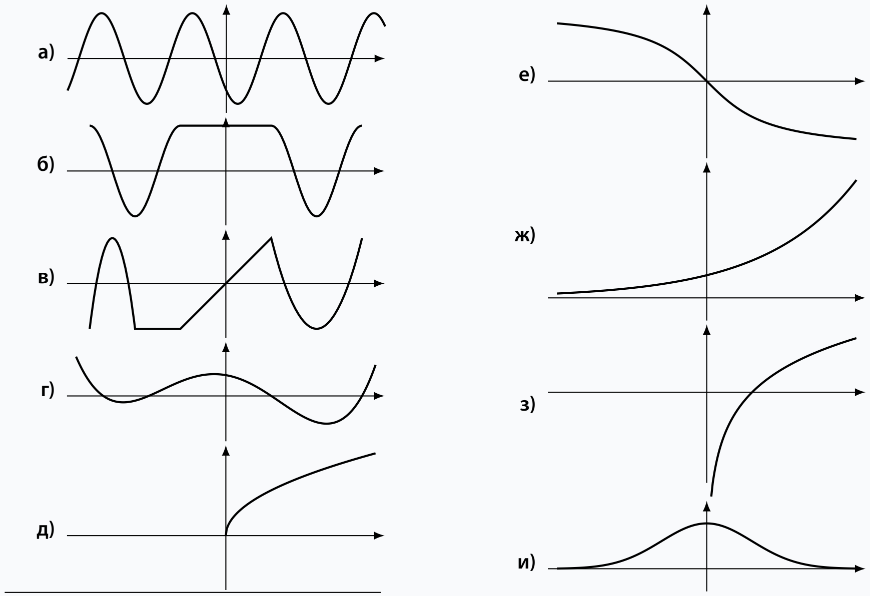
а) Построить примерно касательные к графику $y = f(x)$ в точках $x = -2, -1, 0, 1, 2$.
б) Найти примерно их угловые коэффициенты.

в) Построить эскиз графика производной $y = f'(x)$.

Основано на материалах Хованская и др., *MathINFO: материалы по математике*

Задача 3.3

Для каждого из графиков функций постройте эскиз графика производной этой функции.



Основано на материалах Хованская и др., *MathINFO: материалы по математике*, картинки нарисованы Ю. Г. Кудряшовым

Задача 3.4

Пользуясь определением, найти производные следующих функций

а) $f(x) = 4$,
б) $g(z) = 2z + 3$,
в) $h(x) = x^4$,
г) $K(s) = \sqrt{s}$,
д) $u(t) = 1/t$,
е) (*) $w(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$.

Теорема 2 (Арифметика производных). *Если у функций f и g существуют производные в точке x, а c — некоторая константа, то*

1. $c' = 0$,
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$,
3. $(cf(x))' = cf'(x)$,
4. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$,
5. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
6. $(f(x)/g(x))' = (f'(x)g(x) - g'(x)f(x))/g^2(x)$.

Задача 3.5

Старик Хоттабыч наладил массовый выпуск ковров-самолетов фиксированной ширины и произвольной длины. Он продает их по цене p рублей за погонный метр. При этом количество q погонных метров, проданных за день, зависит от цены. (Чем дороже продает, тем хуже покупают.) Пусть эта зависимость выражается функцией $q = f(p)$.

а) Что означает, что $f(20) = 100$ и $f'(20) = -15$? Если цена за метр увеличится на 1 рубль, как примерно изменится число проданных метров?

б) Пусть общая выручка от продажи ковров-самолетов за день при установленной цене p составляет $R(p)$. Как выразить $R(p)$ с помощью $f(p)$?

в) Вычислить $R'(20)$ в условиях пункта а) с помощью подходящего правила арифметики производных. Какой смысл имеет это число?

Задача 3.6

Найти производную функции $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 1)$ двумя способами: раскрывая скобки и используя правило о производной произведения. Сходятся ли ответы?

Основано на книге Stewart, *Calculus*

Задача 3.7

Найти производную функции

$$g(x) = \frac{x - 3x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

двумя способами: разбивая дробь в сумму дробей и используя правило о произодной частного. Сходятся ли ответы?

Основано на книге Stewart, *Calculus*

Задача 3.8

Пользуясь арифметикой производных, найти производные функций

а) $\dfrac{3x+1}{2x-1}$,

б) $\dfrac{x}{(x-1)^2}$,

в) $\dfrac{x^2+3x+1}{x^2-5x+3}$,

г) $\sqrt{x}(x+x^2)$,

д) $\dfrac{x^{-1}+x}{x^2+1}$.

Основано на книге Stewart, *Calculus*

Определение 6. Функция называется непрерывной в точке a, если $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Функция называется разрывной в точке a, если она не является непрерывной в этой точке. Функция называется непрерывной на отрезке, если она непрерывна в каждой точке отрезка.

Задача 3.9

Пользуясь определениями, доказать, что если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке

Задача 3.10

Пользуясь определением, установить, существует ли производная функции $f(x)$ в точке $x = 0$, если

а) $f(x) = |x^3|$,

б) $f(x) = |x| + x$,

в) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

г) $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$

д) $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

Задача 3.11 (†)

Функцией Дирихле называется следующая функция:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ — рациональное,} \\ 0, & x \text{ — иррациональное.} \end{cases}$$

Доказать, что функция Дирихле разрывна в каждой точке.

Задача 3.12 (†)

Функцией Римана называется следующая функция:

$$f(x) = \begin{cases} 1/q, & x \text{ — рациональное число, представимое в виде несократимой дроби } p/q, \\ 0, & x \text{ — иррациональное.} \end{cases}$$

Доказать, что функция Римана разрывна в каждой рациональной точке и непрерывна в каждой иррациональной.

Задача 3.13 (†)

Привести пример функции, непрерывной на отрезке, но не дифференцируемой ни в одной точке этого отрезка

Список литературы

Stewart, James. *Calculus*. Thomson, 2008.

Хованская, И. А., Сонин, К. С., Щуров, И. В. и Кудряшов, Ю. Г. *MathINFO: материалы по математике*. http://math-info.hse.ru. 2010–2015.

Элементы математического анализа

Летняя экономическая школа «I Love Economics»
Преподаватель: Илья Щуров
Ассистенты: Даниил Вишнев, Даниил Евсеев
Даты: 13—18 августа 2015 г.

Экономика для школьников
ILoveEconomics.ru

4. Производная сложной функции. Экстремумы

Теорема 3. *Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, а функция g дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда функция $h(x) = g(f(x))$ дифференцируема в точке x_0 и*

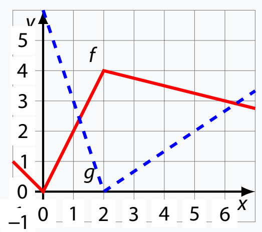
$$h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Задача 4.1

Винни-Пух организовал пчелиную ферму и планирует наладить торговлю мёдом впервые в истории Волшебного Леса. Жители Леса готовы купить $D(p)$ горшков мёда при цене в p золотых монет за горшок. Общие издержки Винни-Пуха на производство Q горшков составляют $f(Q)$. Винни устанавливает цену за один горшок, а затем производит ровно столько мёда, чтобы продать его весь, полностью удовлетворив спрос. Известно, что при цене в 200 золотых монет за горшок спрос составлял 1000 горшков, а издержки на производство 1000 горшков составляли 150 000 монет.

а) Переформулировать последнее предложение в терминах функций D и f.
б) Что такое $f'(Q)$ в экономических терминах?
в) Пусть известно, что $f'(1000) = 4$. Как можно переформулировать это утверждение в экономических терминах?
г) Известно, что если цена за один горшок составляла 200 монет, то её увеличение на 1 монету приведёт к уменьшению спроса на 3 горшка. Что вы можете сказать про $D'(p)$?
д) Винни-Пух решил уменьшить цену на 2 монеты. На сколько (примерно) изменятся в связи с этими общие издержки Винни? (Он по-прежнему планирует удовлетворять весь спрос.)
е) Как зависит прибыль Винни-Пуха от количества произведенных горшков? Как она зависит от цены одного горшка? Как она изменится (примерно) в результате уменьшения цены на 2 монеты?
ж) Является ли рациональным решение об уменьшении цены, если целью Винни является максимизация прибыли?

Задача 4.2



Графики функций f и g изображены на картинке. Пусть $u(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$ и $w(x) = g(g(x))$. Найти следующие производные, если они существуют. Если не существуют, объяснить, почему.

а) $u'(1)$; **б)** $v'(1)$; **в)** $w'(1)$.

Основано на книге Stewart, *Calculus*

Задача 4.3

Представьте функцию в виде $y = f(g(x))$ (то есть укажите функции $z = g(x)$ и $y = f(z)$), затем найдите производную с помощью правила дифференцирования сложной функции.

а) $y = x^2 + 1$; **б)** $y = (x^4 + 3x^2 - 2)^5$; **в)** $y = \sqrt{10x}$; **г)** $y = \sqrt{1-x}$.

Задача 4.4

Представляя функцию $f(x) = |x|$ в виде $f(x) = \sqrt{x^2}$, найдите $f'(x)$. Что вы можете сказать про $f'(0)$?

Задача 4.5

Функция называется *чётной*, если для любого x, $f(-x) = f(x)$. Функция называется *нечётной*, если для любого x, $f(-x) = -f(x)$.

а) Что вы можете сказать о графиках чётных и нечётных функций?
б) Доказать с помощью теоремы о производной сложной функции, что производная чётной функции является нечётной функцией, а производная нечётной функции является чётной функцией.

Задача 4.6 (†)

Обратной функцией к функции f называется функция g, такая, что $g(f(x)) = x$ для всякого x из области определения f. Известно, что если $f'(x_0)$ существует и не равно 0, то $g'(f(x_0))$ также существует. С помощью теоремы о производной сложной функции выразить $g'(f(x_0))$ через производную функции f.

Задача 4.7 (†)

Число e таково, что производная функции e^x (экспоненты) совпадает с самой функцией e^x. Функция $\ln y$ (натуральный логарифм) является обратной к функции e^x. Пользуясь предыдущей задачей, найти $(\ln y)'$.

Задача 4.8 (†)

Пользуясь предыдущей задачей, выразить $(\ln f(x))'$ через производную функции f.

Определение 7. Точка x_0 называется *(нестрогим) локальным максимумом* функции f, если существует такая окрестность U точки x_0, что $f(x_0) \geqslant f(x)$ для любого $x \in U$.

Определение 8. Точка x_0 называется *(нестрогим) локальным минимумом* функции f, если существует такая окрестность U точки x_0, что $f(x_0) \leqslant f(x)$ для любого $x \in U$.

Замечание 1. Локальный максимум может находиться на границе области определения функции. В этом случае соответствующее неравенство должно выполняться для всех точек x из пересечения окрестности U с областью определения функции f.

Задача 4.9

Функция f определена на отрезке $[-1,2]$ и задаётся на нём формулой $f(x) = 2x - 3$. Найти все точки локального максимума и локального минимума.

Определение 9. Точка x_0 называется *глобальным максимумом* функции f на множестве X, если для всякого $x \in X$, $f(x_0) \geqslant f(x)$. Говорят также, что функция принимает *наибольшее значение* в точке x_0.

Определение 10. Точка x_0 называется *глобальным минимумом* функции f на множестве X, если для всякого $x \in X$, $f(x_0) \leqslant f(x)$. Говорят также, что функция принимает *наибольшее значение* в точке x_0.

Замечание 2. Если множество X не указано, подразумевается, что X — вся область определения функции f.

Задача 4.10

Функция $f(x)$ задана указанной формулой. Построить её график. Найти все точки локальных максимумов и локальных минимумов f, а также глобальные максимумы и глобальные минимумы, не вычисляя никаких производных (но пользуясь при необходимости свойствами квадратного трёхчлена).

а) $f(x) = |x|$
б) $f(x) = 1 - x^2$;
в) $f(x) = 1 - (x-1)^2$;
г) $f(x) = |1 - x^2|$;
д) $f(x) = |1 - (x-1)^2|$;

Задача 4.11

Найти глобальные максимумы и минимумы всех функций из предыдущей задачи на множестве $[-2,2]$.

Задача 4.12

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x = 0, \\ x, & x \in (0,1]. \end{cases}$$

Существует ли у этой функции глобальный минимум? Глобальный максимум?

Задача 4.13

Существует ли глобальный максимум функции $f(x) = x^2 + 2x - 1$ на интервале $(-1,2)$? А глобальный минимум?

Задача 4.14

Существует ли глобальный максимум у функции $f(x) = 1/x$ (на всей области определения)?

Задача 4.15

Существует ли глобальный минимум у функции $f(x) = |1/x|$ (на всей области определения)?

Теорема 4. *Пусть $g(y)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция. Тогда если функция $f(x)$ достигает максимума (минимума) в точке x_0, то и функция $h(x) = g(f(x))$ достигает максимума (минимума) в точке x_0.*

Задача 4.16 (†)

Доказать теорему.

Задача 4.17

Найти точки глобального максимума и минимума функции $f(x) = 2(x^2 + 9x + 2)^7 + 100500$.

Материалы ЛЭШ-2014

Задача 4.18

Найти точки глобального максимума и минимума функции $f(x) = 2(x^2 + 9x + 2)^2 + 100500$.

Материалы ЛЭШ-2014

Задача 4.19 (†)

Найдите у функции точки максимума и минимума: $f(x) = |x-1| + |x-2| + \ldots + |x-1535|$.

Материалы ЛЭШ-2014

Список литературы

Stewart, James. *Calculus*. Thomson, 2008.

Элементы математического анализа

Летняя экономическая школа «I Love Economics»
Преподаватель: Илья Щуров
Ассистенты: Даниил Вишнев, Даниил Евсеев
Даты: 13—18 августа 2015 г.

Экономика для школьников

ILoveEconomics.ru

5. Производная и поиск экстремумов

Некоторые задачи и формулировки основаны на материалах ЛЭШ-2014.

Теорема 5. *Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в точке x_0. Если f имеет в x_0 локальный максимум или минимум, то $f'(x_0) = 0$.*

Теорема 6. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, и дифференцируема в каждой точке интервала (a,b). Тогда если для всех $x \in (a,b)$*

1. *$f'(x) > 0$, то функция f возрастает на отрезке $[a,b]$;*
2. *$f'(x) < 0$, то функция f убывает на отрезке $[a,b]$;*
3. *$f'(x) = 0$, то функция f постоянна на отрезке $[a,b]$.*

Нестрогое следствие. Если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с «+» на «–», то x_0 — точка максимума, а если с «–» на «+», то x_0 — точка минимума. Если знак не меняется, то экстремума нет.

Задача 5.1

Найдите интервалы монотонности и исследуйте на экстремумы (найдите локальные максимумы и минимумы, глобальные максимумым и минимумы) функции. Постройте эскиз графика функции.

а) $y = x^2 + 1$; **б)** $y = x^3$; **в)** $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$; **г)** $y = x + \frac{1}{x}$.

Задача 5.2

Найдите глобальные максимумы и минимумы функции на указанном отрезке или на всей области определения, если отрезок не указан

а) $y = x^3 - 3x$, $[-3; 4]$;
б) $y = |x^3 - 3x|$;
в) $y = (|x| - 2)^2$, $[-1,1]$;
г) $y = \begin{cases} (x+2)^4, & -3 < x < 0, \\ -(x-2)^4, & 0 \leqslant x < 3. \end{cases}$

Задача 5.3

Функция прибыли задана следующим образом: $\pi(x) = -x^3 + 4x^2 - 5x - 4$. Найдите максимальное значение прибыли.

Материалы ЛЭШ-2014

Задача 5.4

Решите предыдущую задачу, если известно, что можно произвести не менее двух единиц продукции.

Задача 5.5

Функция общих издержек задана следующим образом: $TC(Q) = Q^2 + 1$.

а) Найдите $AC(Q)$, $MC(Q)$, $\min AC(Q)$. Нарисуйте графики соответствующих функций.
б) Убедитесь, что совпадение $\min AC(Q)$ и точки пересечения кривых $AC(Q)$ и $MC(Q)$ не случайно.
в) Докажите, что если предельные издержки фирмы возрастают, то в точке минимума средних издержек, если она существует, средние издержки равны предельным.

Основано на материалах ЛЭШ-2014

Задача 5.6

При каких значениях параметра p функция $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + px + 1$ имеет хотя бы один локальный минимум?

Задача 5.7 (†)

Найти точки, в которых функция $f(x) = px - x^3$ принимает глобальный максимум и глобальный минимум на отрезке $[0; \sqrt{3}/3]$ в зависимости от значений параметра $p \in (-\infty, \infty)$?

Задача 5.8 (†)

Найдите максимум функции $y = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x^2 + 1}$

Основано на материалах ЛЭШ-2014

Задача 5.9 (†)

Найдите глобальный минимум функции $y = \dfrac{x^3}{1+x}$ на промежутке $(-\infty; -1)$

Основано на материалах ЛЭШ-2014

Задача 5.10 (†)

Найдите глобальный минимум функции $y = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 5x - 1$ на множестве $[-10; -5] \cup [4; +\infty]$

Основано на материалах ЛЭШ-2014

Задача 5.11 (†)

(Условие Куна — Таккера)

а) Покажите, что если x^* — точка максимума непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ при условии $x \geqslant 0$, то в любом случае $f'(x^*) \leqslant 0$ и $x^* \cdot f'(x^*) = 0$.
б) Выведите аналогичное условие, если x^* — точка минимума функции $f(x)$ при условии $x \geqslant 0$.

Основано на материалах ЛЭШ-2014

Элементы математического анализа

Летняя экономическая школа «I Love Economics»
Преподаватель: Илья Щуров
Ассистенты: Даниил Вишнев, Даниил Евсеев
Даты: 13—18 августа 2015 г.

Экономика для школьников
ILE
ILoveEconomics.ru

6. Дискретная оптимизация и функции нескольких переменных

Некоторые формулировки и задачи основаны на материалах ЛЭШ-2014.

Иногда требуется найти наибольшее или наименьшее значение непрерывных функций, область определения которых — это не промежутки в множестве всех действительных чисел $\mathbf{R}$, а множество целых чисел $\mathbf{Z}$ (или — часто в экономике — множество целых неотрицательных чисел $\mathbf{Z}_+$). Например, количество потребляемого или производимого товара может измеряться только целыми неотрицательными числами.

Чтобы решать такие задачи, можно проигнорировать целочисленность и найти максимум функции так, как будто она определена на $\mathbf{R}$. Если окажется, что нужный экстремум — целый, то больше ничего делать не нужно: ведь если в какой-то точке функция принимает, скажем, наибольшее значение *среди всех чисел*, то она тем более принимает там наибольшее значение *среди целых чисел*.

Иногда, однако, это не так: максимальное (минимальное) значение не попадает в нужное множество. Тогда самое большое значение достигается в одной из двух целочисленных точек, соседних с одним из локальных максимумов (минимумов) — не обязательно ближайшего соседа и не обязательно самого высокого (низкого).

Задача 6.1

Найдите наибольшее значение функции $f(x) = -2x^2 + 20x + 10$ при $x \in \mathbf{Z}$.

Основано на материалах ЛЭШ-2014

Задача 6.2

Найдите наибольшее значение функции $f(x) = -50250x^2 + 120600x + 112632$ при $x \in \mathbf{Z}$.

Основано на материалах ЛЭШ-2014

Задача 6.3

Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = 4x^3 - 18x^2 - 165x$ при

а) $x \in \mathbf{Z}_+$; **б)** $x \in (-\infty, 8] \cap \mathbf{Z}$.

Задача 6.4

Построить сечения плоскостями $x = const$ и $y = const$ графика $z = f(x,y)$ функции двух переменных $f(x,y)$. Построить линии уровня этого графика.

а) $f(x,y) = x^2 + 1$;
б) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$;
в) $f(x,y) = x + y^2$;
г) $f(x,y) = 10xy$;
д) $f(x,y) = 4y^2 - x^2$;
е) $f(x,y) = x - 2y$;
ж) $f(x,y) = |x + y|$;
з) $f(x,y) = |x| + |y|$;
и) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Определение 11. Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x,y)$. Зафиксируем некоторое число y_0 и рассмотрим функцию $g(x) = f(x,y_0)$. Это функция одной переменной x. Её производная $g'(x_0)$ в точке x_0 называется *частной производной* функции f по переменной x в точке (x_0, y_0). Обозначается $f'_x(x_0,y_0)$ или $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$. Аналогично можно зафиксировать некоторое число x_0 и рассмотреть функцию $h(y) = f(x_0,y)$. Её производная в точке y_0 называется *частной производной* функции f по переменной y в точке (x_0,y_0). Обозначается $f'_y(x_0,y_0)$ или $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$.

Задача 6.5

Найти частные производные по x и по y от всех функций из предыдущей задачи

Теорема 7 (Необходимое условие экстремума). *Пусть функция двух переменных f определена во всех точках (x,y), $x \in (a,b)$, $y \in (c,d)$. Пусть $x_0 \in (a,b)$ и $y_0 \in (c,d)$ и точка (x_0,y_0) является точкой локального экстремума (максимума или минимума) функции f. Если существуют частные производные $f'_x(x_0,y_0)$ и $f'_y(x_0,y_0)$, то они обе равны нулю.*

Задача 6.6

Рассмотрим функцию $f(x,y) = -x^2 - 4y^2 + 20xy$.

а) Найти все точки, в которых обе частные производные функции f обращаются в нуль.
б) Построить сечения графика $z = f(x,y)$ плоскостями $x = 0$ и $y = 0$.
в) Можно ли сделать вывод, что $(0,0)$ является точкой локального максимума функции f?
г) Построить сечение графика $z = f(x,y)$ плоскостью $x = y$.
д) Что вы теперь думаете насчёт максимума функции f?

Задача 6.7 (†)

Рассмотрим функцию $f(x,y) = -x^2 - 4y^2 + xy$. Показать, что для всех значений параметра a сечение графика $z = f(x,y)$ плоскостью $y = ax$ является параболой с ветвями, направленными вниз и вершиной в нуле. Что вы можете сказать о максимуме функции $f(x,y)$?

Задача 6.8 (†)

Рассмотрим функцию $f(x,y) = -x^2 - 4y^2 + \beta xy$. Найти все значения параметра β, при которых функция f имеет максимум в точке $(0,0)$. Подсказка: рассмотреть сечение графика $z = f(x,y)$ плоскостью $y = ax$.

Задача 6.9 (†)

Рассмотрим функцию $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. При каких значениях параметров a, b и c эта функция имеет максимум в точке $(0,0)$?