

## 1. Игры в нормальной форме

Летняя экономическая школа «I Love Economics»

Курс: Элементы теории игр

Преподаватель: Андрей Бремзен

Ассистенты: Степан, Аня Д., Настя, Аня М., Дмитрий

Покровский, Рита, Ксюша

Дедлайн: 21:00 19 августа 2017 г.



Платформа/Бабушка	Екатерина	Анастасия	Марина
1	6000	6000	8000
2	4000	4000	10000

Если на одной платформе продаются вместе брусника и черника или брусника и голубика, то ягод удастся продать в 1,5 раза больше, так как из такого сочетания получается очень вкусное варенье. Однако если бабушка, продающая чернику, и бабушка, продающая голубику, находятся на одной платформе, то они выручают в 2 раза меньше, чем могли бы, будь только одна из них на этой платформе, так как многие пассажиры плохо различают чернику и голубику. Формализуйте взаимодействие бабушек как игру и найдите равновесия Нэша.

**Определение 1. Стратегия** — описание действий игрока во всех ситуациях, которые могут сложиться в игре. Мы будем рассматривать только *чистые стратегии*.

**Определение 2. Равновесием Нэша** (Nash Equilibrium, NE) называется такая комбинация стратегий участников, что никто из них не может улучшить свое положение при условии, что остальные не меняют своих стратегий.

**Определение 3. Оптимум по Парето** (эффективный по Парето исход) — такой исход игры, при котором невозможно, оставаясь в рамках допустимых исходов, улучшить положение кого-то из игроков, не ухудшая положения остальных.

### Задача 1.1

Два спортсмена участвуют в важном соревновании и являются его фаворитами; спортивное сообщество считает, что шансы обоих спортсменов на победу примерно равны, однако все может измениться, если кто-то использует допинг. Если один спортсмен употребляет допинг, а другой — нет, то первый выигрывает соревнование, если оба спортсмена употребляют допинг, то их шансы на победу остаются равными. Использование допинга запрещено.

Пусть для каждого спортсмена ожидаемая полезность от участия в соревнованиях равна 0, если шансы на победу одинаковые. Победа приносит полезность в размере 10, а проигрыш — в размере -10. Если спортсмен употребляет допинг, то он несет издержки в размере 5, так как боится, что его могут поймать и строго наказать. Составьте матрицу игры, найдите все равновесия по Нэшу в этой игре. Проверьте их на Парето-оптимальность.

### Задача 1.2

Андрюша и Даниил нашли волшебную шкатулочку. Если в нее положить деньги и сказать «Ахалай Махалай», то сумма, лежащая в шкатулке, увеличивается в полтора раза. Андрюша и Даниил решили поступить так: каждый положит в шкатулку сколько хочет, потом они скажут «Ахалай Махалай» и поделят всю сумму поровну. Найдите NE.

### Задача 1.3

На станции Свирь три местных бабушки, Екатерина, Анастасия и Марина, продают пассажирам три вида ягод, каждая бабушка специализируется на своей ягоде: Екатерина собирает чернику, Анастасия собирает голубику, а Марина — бруснику. Вечером на станцию одновременно прибывают два поезда («Карелия» и «Арктика»), поезда прибывают на разные платформы, поэтому бабушкам приходится выбирать, где продавать ягоду. Если бабушка работает на платформе в одиночку, ее выручка (в рублях) от продажи ягоды пассажирам соответствующего поезда определяется из таблицы:

### Задача 1.4

Не сумев скооперироваться при игре в Дилемму заключенного, Игорёк и Костян отбывают наказание в тюрьме. Их досуг не блещет разнообразием, и потому они играют в игру «Пальцы». Участники одновременно выбрасывают один или два пальца правой руки; если сумма показанных пальцев четная, то Игорёк платит Костяну сумму рублей, равную количеству пальцев, если нечетная, то наоборот: Костян платит Игорьку. Составьте матрицу платежей и найдите равновесия Нэша.

### Задача 1.5

Вася и Петя должны загадать число в диапазоне от 20 до 50, включая концы. После этого выбирается  $X$  — минимум из двух загаданных чисел, и выдаются следующие платежи: загадавший большее число получит  $X - 5$ , загадавший меньшее получит  $X + 5$ . Если числа одинаковы, то каждый получит своё число. Найдите NE в такой игре.

### Задача 1.6

В двух странах, Полном Капитализме и Светлом Коммунизме, проводится разная социальная политика. В каждой из них работник, потративший  $Y$  своих усилий, производит  $\sqrt{Y}$  блага. Полезность, полученная работником — разность между потребленным благом и затраченными усилиями. В Полном Капитализме каждый работник потребляет то, что произвел сам. В Светлом Коммунизме все произведенное благо делится поровну между всеми работниками. В каждой стране живет  $N$  работников. Сколько блага будет произведено в каждой стране? Как количество произведенного блага меняется с ростом  $N$  в каждой из стран? Как меняется суммарная полезность с ростом  $N$  в каждой из стран?

### Задача 1.7

У вас с напарником есть шанс получить 40 HSE. Каждый из вас может написать на бумажке любое неотрицательное число, и если сумма чисел окажется не больше 40, то каждый получит то, что попросил. Если сумма окажется больше 40, никто не получит ничего. Найдите все равновесия Нэша и проверьте на эффективность.

**Задача 1.8. Охота на слонов**

Истребление живой природы является серьезной проблемой в Африке. Например, популяция слонов на этом континенте сократилась с более чем 1 млн особей в 1970-х гг. до 600 тыс. сейчас. Правительства разных стран пытаются бороться с браконьерством по-разному, и эта политика зачастую приводит к парадоксальным, на первый взгляд, результатам. Оказывается, что наименьшие проблемы с сокращением популяции слонов испытывают те страны, где... разрешена охота на них!

Например, власти Танзании запретили любую охоту на слонов в 1973 г., и за 5 лет после этого популяция этих животных сократилась более чем вдвое. После того, как в 1978 г. охота была вновь разрешена, количество особей стало расти и вернулось к своему прежнему уровню. Поселения, расположенные вблизи мест обитания слонов, активно пользуются своим правом продавать лицензии (в рамках установленной квоты) желающим поохотиться. Та же картина наблюдается в Зимбабве и других странах, где право на охоту можно законно купить.

- Почему дикие животные, представляющие интерес для человека, часто подвергаются угрозе исчезновения, а домашние животные — нет?
- Объясните, как легализация охоты на животных может приводить к росту популяции.

**Задача 1.9**

$n$  кандидатов борются за пост президента страны. Каждый из них выбирает свою политическую позицию. Под позицией мы будем понимать число из отрезка  $[0, 1]$ , где 0 означает крайнюю левую позицию, а 1 — крайнюю правую. Если два (или больше) кандидата занимают одну политическую позицию, то голоса делятся поровну. Если позиции различны, то каждый житель (жители распределены равномерно по отрезку  $[0, 1]$ ) выбирает того кандидата, к которому он ближе расположен. Другими словами, доля голосов, поданных за кандидата, это длина отрезка жителей, расположенных ближе к нему, чем к его конкуренту. Кандидат выигрывает выборы, если получает больше голосов, чем его оппонент. Если несколько кандидатов получают максимальное (равное) количество голосов, то каждый из них может стать победителем равновероятно. Все занимают позиции независимо друг от друга. Какие политические позиции будут занимать кандидаты?

- Решите задачу для  $n = 2$
- Решите задачу для  $n = 3$  (\*)