

1. Наивные пределы

Летняя экономическая школа «I Love Economics»

Курс: Элементы математического анализа

Преподаватель: Илья Щуров

Ассистенты: Р. Бахарев, Д. Гушин, А. Зотов, Н. Киселев,
А. Медведева, Е. Савинова, Д. Табашникова, М. Хван

Дедлайн: 13 августа 2017 г.



Баллы за задачи с отметкой «Дополнительная» не начисляются, но такие или похожие задачи могут встретиться в зачёте

Определение 1. *Окрестностью* некоторой точки a называется любой открытый интервал (c, d) , содержащий a . *Проколотой окрестностью* точки a называется любая окрестность этой точки, из которой выкинута сама точка a .

Определение 2. Неформальное определение предела. Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки a . Говорят, что функция f имеет предел b в точке a , если при неограниченном приближении x к a значение $f(x)$ функции f в точке x неограниченно приближается к b . При этом значение f в точке a может отличаться от b или вообще быть не определено.

Пишут « $f(x) \rightarrow b$ при $x \rightarrow a$ » или « $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ».

Если x приближается к a с одной стороны (слева или справа), говорят об *одностороннем пределе* и пишут $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ (предел слева) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ (предел справа).

Задача 1.1

Угадать значение предела (если он существует), пользуясь неформальным определением и вычисляя значение функции в указанных точках. При необходимости, использовать калькулятор или компьютер. Обосновать аналитически, что предел действительно равен найденному числу.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2} \quad x = 2,5; 2,1; 2,05; 2,001; 1,9; 1,99; 1,999.$$

Основано на книге Stewart, *Calculus*.

Задача 1.2

Угадать значение предела, пользуясь неформальным определением: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x}$

Задача 1.3. Дополнительная

Найти значение функции $f(x) = \cos \frac{4\pi}{x}$ в точках $x = 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001$. Чему может равняться $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$? Построить график $y = f(x)$. Что вы теперь можете сказать об указанном пределе?

Задача 1.4

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 & x = 0, \\ x^2 - 1, & x > 0. \end{cases}$$

- Построить график $y = f(x)$.
- Найти (если существуют) пределы $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

Задача 1.5. Дополнительная

Налоговая система в некотором государстве устроена следующим образом. Если гражданин получает меньше или ровно 100 золотых монет в месяц, то он выплачивает с них налог в 13%. Если же он получает больше 100 золотых монет, то считается олигархом и платит налог в 95%. Пусть зарплата гражданина составляет p золотых монет. Обозначим через $S(p)$ количество золотых монет, которые у него остаются после выплаты налога. (Монеты считаем бесконечно делимыми.)

- Построить график $S(p)$
- Найти $\lim_{p \rightarrow 100} S(p)$, $\lim_{p \rightarrow 100^-} S(p)$, $\lim_{p \rightarrow 100^+} S(p)$,

Теорема 1. Арифметика пределов. Пусть c — некоторая константа и существуют пределы

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B.$$

Тогда

- $\lim_{x \rightarrow a} c = c$;
- $\lim_{x \rightarrow a} x = a$;
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$;
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = A - B$;
- $\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = cA$;
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = AB$;
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ если $B \neq 0$;
- $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{A}$.

В следующих задачах необходимо пользоваться арифметикой пределов, аккуратно обосновывая каждый шаг ссылкой на соответствующие правила из списка выше.

Задача 1.6. Дополнительная

Доказать по индукции, что $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^n$

Задача 1.7

Найти следующие пределы

- $\lim_{x \rightarrow -2} (3x^4 + 2x^2 - x + 1)$;
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)^2 - 16}{h}$;
- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4+x}$;
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 6x - 4}$;
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h}$;

Список литературы

Stewart, James. *Calculus*. Thomson, 2008.